

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1910)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 401-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__401_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1910).

Sujets des compositions.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Dans un plan donné, il y a une infinité de cercles (Γ) orthogonaux à tous les cercles (C) qui passent par deux points donnés P, P' dans ce plan.

A tout point M correspond un point M' tel que M et M'

Ann. de Mathemat , 4^e série, t. X. (Septembre 1910.) 27

*soient conjugués harmoniques par rapport à tout cercle (Γ).
Donner la construction géométrique de ces points.*

1° Trouver le lieu de M et M' quand MM' a une longueur donnée l ;

2° Trouver le lieu de M' quand M décrit une droite (D). On pourra supposer successivement que la droite (D) est perpendiculaire à PP' , qu'elle passe par l'un des point P ou P' ; qu'elle rencontre PP' en un point autre que P ou P' , étant oblique à PP' et enfin que (D) est parallèle à PP' ;

3° Lieu de M' quand M décrit une parabole passant par P et P' et dont l'axe est perpendiculaire à PP' .

Dans chacun des cas examinés on étudiera le déplacement de M' , celui de M étant supposé connu ;

4° On considère dans le plan donné un nombre quelconque de cercles (C), soient (C_1) , (C_2) , ..., (C_p) et autant de coefficients numériques donnés a_1 , a_2 , ..., a_p ; puis q cercles (Γ) : (Γ_1) , (Γ_2) , ..., (Γ_q) et des coefficients α_1 , α_2 , ..., α_q . Peut-on toujours déterminer, dans le plan donné, deux points S_1 , S_2 , tels que la somme des puissances d'un point quelconque X du plan par rapport à tous ces cercles, chaque puissance étant multipliée par le coefficient correspondant, soit égale à la somme des carrés des distances de ce point X aux deux points cherchés S_1 , S_2 , multipliée par la demi-somme des coefficients donnés ? En supposant que les cercles (C) et (Γ) appartiennent aux deux familles considérées, trouver les conditions pour que S_1 et S_2 soient deux points conjugués M , M' .

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On considère deux paraboloïdes hyperboliques équilatères égaux, P et Q , qui ont même axe et même sommet.

1° On demande de trouver toutes les droites D dont les conjuguées D' et D'' par rapport à P et Q sont dans un même plan (on ne considère que des droites réelles situées à distance finie). Montrer que deux droites D' et D'' qui correspondent à une même droite D sont à la même distance de l'axe des paraboloïdes, qu'elles font le même angle avec l'axe et que leurs projections sur un plan perpendiculaire à cet axe font un angle constant.

2° On considère une droite D particulière, que l'on désigne par D_1 ; on prend sa conjuguée D_2 par rapport au paraboloïde P , puis on prend la conjuguée D_3 de D_2 par rapport au paraboloïde Q , et ainsi de suite, de telle sorte qu'une droite D_{2p} soit conjuguée de la droite D_{2p-1} par rapport à P et qu'une droite D_{2q+1} soit conjuguée de la droite D_{2q} par rapport à Q ; étudier la distribution de ces droites.

3° Une droite D se déplace en faisant un angle constant avec l'axe des paraboloïdes et de façon que les surfaces engendrées par D' et D'' fassent un angle constant au point commun à D' et D'' ; quelle surface engendre D ; quelles surfaces engendrent D' et D'' et quel est le lieu du point commun à D' et D'' ; ce lieu peut-il être situé sur la surface engendrée par D ? (On indiquera un mode de génération simple de ces diverses surfaces.)

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

On considère la famille de surfaces du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = \text{const.},$$

a, b, c étant des nombres positifs distincts et donnés, les axes de coordonnées étant rectangulaires; on désigne par (E) l'équation aux dérivées partielles des surfaces (S) orthogonales à cette famille de surfaces du second degré et par (γ) les courbes caractéristiques de l'équation (E) :

1° Exprimer les coordonnées des points d'une surface (S) à l'aide de deux paramètres u et v ; montrer qu'on peut adopter les expressions de la forme

$$x = f(v)f_1(u), \quad y = \varphi(v)\varphi_1(u), \quad z = \psi(v)\psi_1(u),$$

et que la recherche des lignes asymptotiques de toute surface (S) se ramène aux quadratures.

2° Quelle est la condition pour qu'une courbe imposée, distincte d'une caractéristique,

$$x = f(v), \quad y = \varphi(v), \quad z = \psi(v),$$

soit ligne asymptotique d'une surface (S) ?

La détermination des familles d'asymptotiques distinctes

des caractéristiques, des surfaces (S), peut se ramener à la recherche des solutions de trois équations différentielles linéaires analogues.

L'intégration de ces équations linéaires peut-elle se ramener aux quadratures?

Une famille d'asymptotiques a-t-elle une enveloppe?

Comment trouvera-t-on les surfaces (S) dont une famille d'asymptotiques est douée d'enveloppe?

Examiner les particularités de la surface et de ses asymptotiques dans le voisinage de l'enveloppe, en se bornant aux surfaces dont les coordonnées correspondent à des fonctions holomorphes; donner explicitement des exemples très simples.

3° Déterminer les surfaces (S) dont les asymptotiques d'une famille sont des caractéristiques (γ). Définir géométriquement ces surfaces.

4° Soient (S_1) une surface (S) choisie et (Γ_1) les développables circonscrites à (S_1) le long des caractéristiques génératrices (γ) supposées non asymptotiques.

On réalise une déformation déterminée de la surface (S_1) de telle sorte que tout point M de cette surface décrive la génératrice rectiligne de la développable (Γ_1) tangente en ce point, et l'on désigne par M_1 la position de M après la déformation, par (Σ_1) la surface obtenue.

Dans le cas particulier où l'on choisit le point M' sur l'arête de rebroussement de la développable (Γ_1), on obtient une surface (Σ_1) particulière, soit (Σ_0). Montrer qu'au réseau tracé sur (S_1) par les courbes (γ) et leurs conjuguées, correspond sur (Σ_0) un réseau conjugué.

5° Déterminer les déformations (S_1, Σ_1) faisant correspondre une courbe (γ) de (S_1) et possédant la propriété précédente de la déformation (S_1, Σ_0).

Montrer que ces déformations associent à toute surface (S_1) une famille à un paramètre de surfaces (Σ_1) dont les asymptotiques se correspondent, exception étant faite pour certaines surfaces (S_1) particulières que l'on caractérisera.

Trouver celles de ces familles Σ_1 dont les lignes asymptotiques correspondent aux asymptotiques de la surface (S_1) initiale et les définir géométriquement.

N. B. On rappelle que l'équation différentielle des lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes, est

$$\begin{vmatrix} x''_{uu} & x'_{uu} & x'_v \\ y''_{uu} & y'_{uu} & y'_v \\ z''_{uu} & z'_{uu} & z'_v \end{vmatrix} du^2 + 2 \begin{vmatrix} x''_{uv} & x'_{uv} & x'_v \\ y''_{uv} & y'_{uv} & y'_v \\ z''_{uv} & z'_{uv} & z'_v \end{vmatrix} du dv + \begin{vmatrix} x''_{vv} & x'_{vv} & x'_v \\ y''_{vv} & y'_{vv} & y'_v \\ z''_{vv} & z'_{vv} & z'_v \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

MÉCANIQUE.

Mouvement d'un corps solide pesant fixé par un de ses points O autour duquel il peut tourner librement et assujéti à toucher un plan horizontal fixe H; les liaisons sont supposées sans frottement et le solide au-dessus du plan H.

I. Le solide est de révolution, généralement non homogène, et est suspendu par un point de son axe de figure.

a. Trouver les équations du mouvement et indiquer les circonstances générales de ce mouvement lorsque les conditions initiales sont arbitraires. -

Discuter complètement lorsque le solide est abandonné sans vitesses initiales; examiner les cas particuliers dans lesquels le solide admet, soit un plan passant par l'axe de figure, soit un plan mené par O et perpendiculairement à cet axe, comme plan de symétrie de masses; indiquer nettement, par des figures, la nature du mouvement du point de contact du solide sur le plan H.

b. Lorsque l'axe de figure du solide est axe de symétrie des masses, discuter le mouvement, les conditions initiales étant arbitraires; examiner le cas particulier où le solide est homogène.

APPLICATION. — Le mouvement instantané du solide est une rotation que l'on peut toujours décomposer en une rotation, soit ω , portée par l'axe du solide et en une rotation verticale.

On suppose, en se plaçant dans le cas (b), que les conditions initiales vérifient la relation

$$2T = C\omega^2,$$

$2T$ étant la force vive, C le moment d'inertie du solide par rapport à son axe.

Calculer explicitement le mouvement, noter ses particularités et indiquer, dans les deux cas possibles, comment ce mouvement peut être imprimé au solide.

II. *Le solide ayant une forme quelconque, on désigne par (Γ) la courbe située sur le solide et lieu des points de contact M avec le plan H ; on exprime les coordonnées, par rapport aux axes principaux d'inertie relatifs au point fixe O , d'un point quelconque de cette courbe à l'aide d'un paramètre u et l'on définit la position du solide à l'aide du paramètre u et de l'orientation du plan vertical passant par OM .*

Trouver les équations donnant ces paramètres et indiquer les circonstances générales du mouvement.

On pourra attacher au solide, en tout point M de la courbe (Γ) , un trièdre auxiliaire (T) ayant comme arête la normale en M à la surface du solide, l'une des faces passant par le point fixe O ; et regarder le mouvement du solide comme résultant d'un mouvement relatif par rapport au trièdre (T) et d'un mouvement d'entraînement de ce trièdre.