

AURIC

Note sur la géométrie du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 394-398

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__394_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'1c]

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

PAR M. AURIC.

Soit le triangle de référence ABC : nous définirons le point P au moyen de ses coordonnées trilinéaires relatives à celles du centre de gravité G; en d'autres termes, nous admettrons que P est le point d'application de la résultante de trois forces parallèles F_A, F_B, F_C respectivement appliquées en A, B, C; ces forces (ou des expressions proportionnelles) seront les coordonnées de P ⁽¹⁾.

F_A est une fonction quelconque des côtés a, b, c qui déterminent sans ambiguïté le triangle de référence

$$F_A = \varphi(a, b, c)$$

dont les coefficients sont des fonctions symétriques de a, b, c .

Pour que P soit un point *symétrique* du triangle, nous dirons que F_B et F_C doivent se déduire de F_A par permutation circulaire des éléments a, b, c :

$$F_B = \varphi(b, c, a), \quad F_C = \varphi(c, a, b).$$

Les forces F_A, F_B, F_C étant données, on peut les per-

⁽¹⁾ Cette définition permet en quelque sorte une composition de divers points P, par l'addition des forces correspondantes respectivement appliquées en A, B, C.

muter circulairement et obtenir ainsi deux nouveaux points P' , P'' que nous appellerons les *permutants* de P :

P	F_A	F_B	F_C
P'	F_B	F_C	F_A
P''	F_C	F_A	F_B

Le triangle ou *triple point* $PP'P''$ jouit de nombreuses propriétés; il a le même centre de gravité que le triangle de référence et il est trihomologique à celui-ci.

Au moyen de la relation

$$c = 2p - a - b,$$

on peut mettre $\varphi(a, b, c)$ sous la forme $\psi(a, b)$

$$P..... \quad \psi(a, b) \quad \psi(b, c) \quad \psi(c, a)$$

d'où l'on peut déduire un point P_1 dit *associé* de P , soit un *double point* PP_1

$$P_1..... \quad \psi(a, c) \quad \psi(b, a) \quad \psi(c, b)$$

par permutation des deux côtés adjacents au sommet considéré.

Ce point associé P_1 possédera également deux permutants P'_1 , P''_1 qui seront les associés de P' , P'' .

Lorsque l'associé P_1 se confond avec P , on dit que celui-ci est un *simple point*; dans ce cas, les coordonnées sont évidemment de la forme

$$\chi(a), \quad \chi(b), \quad \chi(c).$$

En particulier, au double point PP_1 correspond le simple point P_0 :

$$P_0..... \quad \psi(a, a) \quad \psi(b, b), \quad \psi(c, c)$$

et l'on démontre que le triangle P_0PP_1 jouit de nom-

breuses propriétés; il a le même centre de gravité que le triangle de référence, et il est homologique à celui-ci.

Pour

$$\chi(a) = 1$$

P est le centre de gravité.

Pour

$$\chi(a) = a$$

P est le centre du cercle inscrit.

Pour

$$\chi(a) = a^2$$

P est le point de Lemoine (centre des symédiales).

D'une manière générale, nous allons chercher le lieu des points

$$[f(a)]^n, [f(b)]^n, [f(c)]^n,$$

lorsque n varie.

Posons

$$f(a) = e^\alpha, \quad f(b) = e^\beta, \quad f(c) = e^\gamma;$$

il est évident que le lieu sera la courbe

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & Lx \\ 1 & \beta & Ly \\ 1 & \gamma & Lz \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x^{\gamma-\beta} y^{\alpha-\gamma} z^{\beta-\alpha} = 1,$$

courbe qui est en général transcendante. Toutefois, si l'on a

$$[f(b)]^2 = f(a)f(c) \quad \text{ou} \quad 2\beta = \alpha + \gamma,$$

ce lieu sera une courbe algébrique

$$y^2 = xz.$$

Si la fonction $\chi(a)$ est rationnelle, on pourra la

mettre sous la forme d'un polynome entier $R(a)$ et d'une somme algébrique de fractions simples

$$\sum \frac{1}{a+\lambda}, \quad \sum \frac{1}{a^2+\lambda a+\mu}.$$

Le point

$$a+\lambda, \quad b+\lambda, \quad c+\lambda$$

se trouve aisément sur la droite joignant le centre de gravité au centre du cercle inscrit : le point

$$a^2+\lambda a+\mu, \quad b^2+\lambda b+\mu, \quad c^2+\lambda c+\mu$$

se déterminera facilement par la considération des deux points précédents et du point de Lemoine : il suffira donc de chercher les points inverses des points ainsi obtenus, ce qui ne présentera aucune difficulté ⁽¹⁾.

Considérons le double point

$$\begin{array}{llll} P \dots\dots\dots & \psi(b) & \psi(c) & \psi(a) \\ P_1 \dots\dots\dots & \psi(c) & \psi(a) & \psi(b) \end{array}$$

Pour $\psi(a) = a$ on a

II_1 (inverses des points de Jérabek).

Pour $\psi(a) = a^2$ on a

JJ_1 (inverses des points de Brocard).

D'une manière générale, on pourra comme précédemment chercher le lieu des points

$$\begin{array}{lll} [f(b)]^n, & [f(c)]^n, & [f(a)]^n, \\ [f(c)]^n, & [f(a)]^n, & [f(b)]^n, \end{array}$$

(¹) Pour avoir l'inverse d'un point P on joint AP, BP, CP qui coupent BC, CA, AB en α, β, γ ; on prend les symétriques α', β', γ' de ces points par rapport aux milieux de BC, CA, AB et l'on joint $A\alpha', B\beta', C\gamma'$ qui se coupent en P' inverse de P.

et l'on trouvera les courbes

$$\begin{aligned}x^{\beta-\alpha}y^{\gamma-\beta}z^{\alpha-\gamma} &= 1, \\x^{\alpha-\gamma}y^{\beta-\alpha}z^{\gamma-\beta} &= 1.\end{aligned}$$

Si la fonction $\psi(a)$ est rationnelle, on la réduira en éléments simples et l'on sera ramené à la considération des doubles points I, I, J, J, à l'aide desquels on pourra aisément déduire le double point cherché.

Observations. — Si l'on tient compte de la relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

la fonction $\psi(a, b, c)$ devient

$$\varphi(2R \sin A, 2R \sin B, 2R \sin C),$$

ce qui permet une autre définition des coordonnées du point P; elle ne diffère d'ailleurs de la précédente que pour la forme.

En particulier, les coordonnées du centre du cercle circonscrit seront

$$\sin 2A, \quad \sin 2B, \quad \sin 2C;$$

celles de l'orthocentre

$$\sin A \cos B \cos C, \quad \sin B \cos C \cos A, \quad \sin C \cos A \cos B.$$

On pourrait également définir F_A, F_B, F_C par une équation de la forme

$$\varphi(F_A, F_B, F_C; a, b, c) = 0$$

et par les deux autres qui s'en déduisent par permutation circulaire.

On voit, par cette seule énumération, l'immense variété des points du triangle soi-disant remarquables et étiquetés trop souvent d'un nom propre à la façon des fossiles de la Paléontologie.