

A. BUHL

**Sur les surfaces dont les lignes
asymptotiques se déterminent par
quadratures (troisième note)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 385-394

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT PAR QUADRATURES

PAR M. A. BUHL.

Reprenons d'abord la moulure engendrée par une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre de révolution de rayon fixe k .

$$\begin{aligned} x \cos u + y \sin u &= k, \\ x \sin u - y \cos u &= ku + v \end{aligned}$$

d'où, pour équations de la surface,

$$(1) \quad \begin{cases} x = k \cos u + (ku + v) \sin u, \\ y = k \sin u - (ku + v) \cos u, \\ z = F(v). \end{cases}$$

La méthode classique conduit alors, pour définir les asymptotiques, à l'équation différentielle

$$(2) \quad (ku + v) du^2 + \frac{F''(v)}{F'(v)} dv^2 = 0.$$

Remarquons que, si le cylindre O se réduit à son axe, on a

$$k = 0, \quad v = r, \quad u = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Dans ces conditions la moulure se réduit à une surface de révolution et l'équation (2) donne immédiatement l'équation bien connue des asymptotiques d'une telle surface.

Dans la Note précédente l'équation (2) était remplacée par une autre relative aux coordonnées polaires r et θ . Nous passerons bientôt de l'une à l'autre; pour l'instant conservons les coordonnées u et v .

2. L'équation (2) ne semble intégrable par les méthodes élémentaires que si l'on a

$$(3) \quad \frac{F''(v)}{F'(v)} = -(4\alpha^2 v + 2\beta),$$

α et β étant des constantes quelconques. Dans ces conditions, si l'on pose

$$(4) \quad v = v_1 - \frac{\beta}{2\alpha^2}, \quad u = u_1 + \frac{\beta}{2k\alpha^2}, \quad \alpha \neq 0,$$

elle devient

$$\frac{du_1}{dv_1} = \pm 2\alpha \sqrt{\frac{v_1}{ku_1 + v_1}}.$$

Posant encore

$$\frac{ku_1 + v_1}{v_1} = t^2,$$

il vient définitivement

$$(5) \quad \frac{dv_1}{v_1} = \frac{2t^2 dt}{2k\alpha + t - t^3}.$$

En somme, il s'agissait d'une de ces équations qu'un changement linéaire de variables ramène au type homogène.

Quant à l'équation (3) elle donne immédiatement la fonction F et, d'après la forme de l'équation (5), on peut énoncer le théorème suivant :

Si la courbe, en coordonnées cartésiennes v et z ,

$$z = \int e^{-2(\alpha^2 v^2 + \beta v + \gamma)} dv$$

roule sur un cylindre de révolution de génératrices parallèles à Oz , elle engendre une moulure dont la détermination des asymptotiques ne dépend que de quadratures élémentaires.

3. Le paragraphe précédent doit être modifié si $\alpha = 0$, car alors le changement de variables (4) n'a plus de sens précis. Il y a même avantage à modifier légèrement toutes les notations. Si μ est une constante, soit

$$\frac{F''}{F} = -\mu^2 \quad \text{d'où} \quad F = Ae^{-\mu^2 v}.$$

Alors (2) devient

$$(ku + v) du^2 = \mu^2 dv^2.$$

Si l'on pose

$$R = \pm \sqrt{ku + v},$$

on intègre immédiatement, ce qui donne

$$\frac{u}{2\mu} = R - k\mu \log(R + k\mu) + C.$$

Donc, pour les asymptotiques de la moulure engendrée par roulement de la courbe exponentielle, la conclusion est la même qu'au paragraphe précédent, avec cette simplification que les quadratures se font immédiatement, tandis que, pour intégrer la fraction rationnelle en t de l'équation (5), il faut commencer par chercher les racines d'un polynôme du troisième degré.

4. Les résultats précédents me semblent constituer à peu près tout ce qu'on peut trouver d'élémentaire concernant les asymptotiques des moulures (1). J'ajouterai quelques remarques qui, si elles n'avancent pas beaucoup la question de l'intégration de (2), ont cependant l'intérêt de rattacher cette équation à d'autres recherches. Pour cela il est plus commode de reprendre les notations de la Note précédente et de substituer, comme l'indique la figure, les coordonnées semi-polaires r, θ, z aux coordonnées curvilignes u, v .

Posons

$$(ku + v)^2 = r^2 - k^2 = R^2$$

et (2) devient

$$\frac{dR}{dv} = 1 \pm k \sqrt{-\frac{F''}{F'R}}.$$

Imaginons que $F(v) = z$ donne $v = \Phi(z)$. Alors

$$\frac{F''(v)}{F'(v)} = \frac{\frac{d}{dv} \left(\frac{dz}{dv} \right)}{\frac{dz}{dv}} = \frac{d}{dz} \frac{1}{\Phi'(z)} = -\frac{\Phi''(z)}{\Phi'^2(z)}.$$

Posant, toujours comme dans la Note précédente,

$$\Phi' = \Phi'^2 f(\Phi),$$

nous retombons sur l'équation différentielle déjà obtenue

$$(6) \quad \frac{dR}{d\Phi} = 1 \pm k \sqrt{\frac{f(\Phi)}{R}},$$

dans laquelle les variables sont au fond r et z et qui, par suite, définira les asymptotiques de notre surface moulure en la coupant par deux familles de surfaces de révolution d'axe Oz .

5. C'est l'équation (6) qui est susceptible d'être rapidement transformée en d'autres se rattachant à des problèmes différents.

Posons $R = \rho^{2m}$. Elle devient

$$2m \frac{d\rho}{d\Phi} = \rho^{1-2m} \pm k \sqrt{f(\Phi)} \rho^{1-3m},$$

ou, si $m = -1$,

$$-2 \frac{d\rho}{d\Phi} = \rho^3 \pm k \sqrt{f(\Phi)} \rho^4.$$

Or, si $\sqrt{f(\Phi)}$ est rationnel, on obtient une de ces équations qui ont donné récemment et donnent encore lieu à de remarquables travaux, au premier rang desquels il faut citer ceux de M. Pierre Boutroux (*voir* particulièrement *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre* (Gauthier-Villars, 1908) et *Équations différentielles et fonctions multiformes* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1910).

De tels travaux avancent le problème de Géométrie ici considéré comme tout progrès effectué dans la théorie de l'équation de Riccati avancerait les nombreux problèmes géométriques qui conduisent à une telle équation.

Il faut cependant ajouter que c'est l'intégrale analy-

tique dans le champ complexe qui a été étudiée jusqu'ici, tandis qu'au point de vue géométrique il faudrait surtout connaître l'allure des courbes intégrales réelles.

6. Si $m = 1$, l'équation (6) peut s'écrire

$$-2\rho^2 d\rho + [\rho \pm k\sqrt{f(\Phi)}] d\Phi = 0:$$

elle est donc de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \left(\rho + \frac{\partial F}{\partial \Phi} \right) d\Phi = 0.$$

Or, c'est là un type d'équations qui se rencontre assez fréquemment dans des questions de Géométrie et de Mécanique.

M. G. Darboux rencontre ce type en cherchant à réduire des différentielles linéaires à des formes canoniques simples (*Comptes rendus*, 15 novembre 1909). Dans un ordre d'idées qui, au fond, ne diffère pas du précédent, soit le système de deux équations canoniques

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Si l'on se propose de déterminer un changement de variables

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

conservant la forme canonique, il faut, comme on sait, que

$$\xi d\eta - x dy$$

soit une différentielle exacte (H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 3).

Égalons cette expression à $dF(x, y)$ et identifions.

Il viendra

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \xi \frac{\partial \eta}{\partial y} = x + \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Éliminons ξ et nous obtenons pour déterminer η une équation aux dérivées partielles qui exige l'intégration de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \left(x + \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Rapprocher toutes ces difficultés ne paraît cependant pas permettre de les éclairer notablement l'une par l'autre, mais, faute de pouvoir mieux faire, le rapprochement ne m'a pas semblé indigne d'être signalé.

7. *Retour sur les surfaces de révolution.* — J'ai terminé ma précédente Note par un théorème qui peut s'énoncer ainsi :

La surface de révolution

$$(7) \quad r = A \Phi(z) + B \Phi'(z) \int \frac{dz}{[\Phi(z)]^2}$$

est coupée, suivant ses asymptotiques, par les deux familles de conoïdes

$$\left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 = \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$$

qui ne dépendent en rien de A et de B.

En particulier on peut commencer par prendre $A=1$, $B=0$ et, par suite, à toute surface de révolution $r=\Phi(z)$, dont les conoïdes définissant les asymptotiques seront connus, on peut adjoindre, par une simple quadrature, d'autres surfaces de révolution coupées, suivant leurs asymptotiques, par les mêmes conoïdes. Je vais développer ces assertions sur quelques exemples.

Soit $\Phi(z)=z^m$. L'équation (7) devient

$$r = A z^m + \frac{B}{1-2m} \frac{1}{z^{m-1}}.$$

Pour $m=2$, si l'on fait d'abord $A=1$, $B=0$, puis $A=0$, $B=1$, on trouve la parabole et l'hyperbole méridiennes

$$r = Az^2, \quad rz = \text{const.}$$

donnant des surfaces de révolution dont les asymptotiques se projettent sur l'axe Oz au moyen des mêmes génératrices conoïdales.

Soit encore $\Phi(z) = \sqrt{z^2 + b^2}$. L'équation (7) devient

$$r = A\sqrt{z^2 + b^2} + \frac{B}{b}\sqrt{z^2 + b^2} \arctan \frac{z}{b}.$$

Faisons d'abord $A = \frac{a}{b}$, $B=0$, puis $A=0$, $B=1$. On conclut de là que l'hyperboloïde de révolution

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

et la surface

$$br = \sqrt{z^2 + b^2} \arctan \frac{z}{b}$$

ont leurs asymptotiques sur les mêmes plans gauches passant par Oz .

8. *Cas du tore.* — Les lignes asymptotiques du tore dépendant, en général, des fonctions elliptiques, on possède, à leur sujet, peu de résultats élémentaires.

Aussi est-il intéressant d'appliquer à cette surface le théorème précédent qui l'associe immédiatement à d'autres dont les asymptotiques se trouvent du même coup. Si

$$\Phi(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2},$$

il faut d'abord calculer l'intégrale indéfinie

$$(8) \quad \int \frac{dz}{(a + \sqrt{b^2 - z^2})^2}.$$

Posant pour abrégér $c^2 = a^2 - b^2$ on trouve sans peine qu'elle est égale à

$$\frac{a}{c^2} \frac{z}{a + \sqrt{b^2 - z^2}} + \frac{2b^2}{c^3} \arctan \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b-z}{b+z}} \right).$$

Formant alors l'équation (7) on voit que, pour $A=1$, $B=0$, on y retrouve le tore

$$(r-a)^2 + z^2 = b^2.$$

Pour $A=0$, $B=\frac{c^2}{a}$, on a la surface

$$r = z + \frac{2b^2}{ac} (a + \sqrt{b^2 - z^2}) \arctan \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b-z}{b+z}} \right)$$

qui semble être la plus simple parmi celles dont les asymptotiques sont sur les mêmes conoïdes que les asymptotiques du tore précédent.

9. *Cas où $a=b$.* — Le tore est alors engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes. Alors l'intégrale (8) est égale à

$$\frac{2}{3a} \frac{1 + 3\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{a-z}{a+z}}\right)^3}.$$

L'égalité (7) devient

$$r = A(a + \sqrt{a^2 - z^2}) + B \frac{a+z}{3a} \frac{1 + 3\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}}{1 + \sqrt{\frac{a-z}{a+z}}}.$$

Cette fois, pour $A=0$, on trouve une courbe algébrique du troisième degré qui, en tournant autour de Oz , engendre une surface de révolution dont les asymptotiques se projettent conoïdalement sur Oz

tout comme celles du tore. Et il existe une double infinité de courbes *algébriques* ayant la même propriété.