

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1910

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 364-381

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__364_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1910.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

Un point matériel de masse unité $M(x, y, z)$ est soumis à une force MF qui a pour composantes

$$X = -ax, \quad Y = -by, \quad Z = -cz,$$

où a, b, c sont trois constantes positives données :

1° Calculer les coordonnées x, y, z en fonction du temps, connaissant la position initiale

$$M_0(x_0, y_0, z_0),$$

ainsi que la vitesse initiale

$$M_0 V_0(x'_0, y'_0, z'_0).$$

Conditions pour que le mouvement soit périodique.

2° Un second point matériel libre de masse 1 se trouve coïncider constamment avec l'extrémité F de la force MF . Montrer que le point F obéit au même champ de force que le point M , et trouver la vitesse correspondante à la position initiale F_0 de ce point.

3° Plus généralement, montrer que tout point matériel N , de masse 1, placé initialement sur la droite $M_0 F_0$, peut recevoir une vitesse initiale $N_0 W_0$ telle qu'il reste constamment situé sur la droite MF . On examinera le cas particulier où la position ini-

tiale N_0 du point N serait dans l'un des plans de coordonnées.

4° La position initiale N_0 variant sur la droite $M_0 F_0$, trouver le lieu du point W_0 et le lieu de la droite $N_0 W_0$.

1° Les équations du mouvement du point M sont :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ax = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + by = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + cz = 0.$$

En les intégrant et tenant compte des conditions initiales données, on trouve

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 \cos \sqrt{a} t + \frac{x'_0}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} t, \\ y = y_0 \cos \sqrt{b} t + \frac{y'_0}{\sqrt{b}} \sin \sqrt{b} t, \\ z = z_0 \cos \sqrt{c} t + \frac{z'_0}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c} t. \end{cases}$$

x, y, z sont trois fonctions périodiques de t dont les périodes sont $\frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \frac{2\pi}{\sqrt{b}}, \frac{2\pi}{\sqrt{c}}$. Pour que le mouvement soit périodique, il faut et il suffit que ces trois périodes soient des sous-multiples d'une période commune μ :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\mu}{p}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{b}} = \frac{\mu}{q}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{\mu}{r},$$

et pour cela il faut et il suffit que les rapports $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ et $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$ soient *rationnels*.

2° Les coordonnées du point F sont

$$\begin{aligned} x_1 &= x + X = (1-a)x, \\ y_1 &= y + Y = (1-b)y, \\ z_1 &= z + Z = (1-c)z. \end{aligned}$$

La force qui, agissant sur F , produirait ce mouve-

ment a pour composantes

$$X_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = (1-a) \frac{d^2 x}{dt^2} = -(1-a) a x = -a x_1,$$

$$Y_1 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = (1-b) \frac{d^2 y}{dt^2} = -(1-b) b y = -b y_1,$$

$$Z_1 = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = (1-c) \frac{d^2 z}{dt^2} = -(1-c) c z = -c z_1.$$

Le point F obéit donc bien au même champ de forces ;
les valeurs initiales des composantes de sa vitesse sont

$$(1-a)x'_0, \quad (1-b)y'_0, \quad (1-c)z'_0.$$

3° Soient ξ , η , ζ les coordonnées du point N que nous supposons placé dans le même champ de force. Ces coordonnées seront donc données à chaque instant par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \xi_0 \cos \sqrt{a} t + \frac{\xi'_0}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} t, \\ \eta = \eta_0 \cos \sqrt{b} t + \frac{\eta'_0}{\sqrt{b}} \sin \sqrt{b} t, \\ \zeta = \zeta_0 \cos \sqrt{c} t + \frac{\zeta'_0}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c} t. \end{cases}$$

Le point N étant placé initialement sur la droite $M_0 F_0$, on a, en posant

$$\lambda = \frac{M_0 N_0}{M_0 F_0},$$

$$(3) \quad \xi_0 = (1-\lambda a) x_0, \quad \eta_0 = (1-\lambda b) y_0, \quad \zeta_0 = (1-\lambda c) z_0.$$

Pour que ce point N reste constamment sur la droite MF, il faut que, quel que soit t , on ait

$$\frac{\xi - x}{ax} = \frac{\eta - y}{by} = \frac{\zeta - z}{cz},$$

ou

$$\frac{\xi - (1-\lambda a)x}{ax} = \frac{\eta - (1-\lambda b)y}{by} = \frac{\zeta - (1-\lambda c)z}{cz},$$

ce qui s'écrit, en remplaçant ξ, η, ζ et x, y, z par leurs valeurs (2) et (1) en fonction de t , et tenant compte des relations (3),

$$(4) \quad \frac{U \sin \sqrt{a} t}{x} = \frac{V \sin \sqrt{b} t}{y} = \frac{W \sin \sqrt{c} t}{z},$$

en posant

$$\begin{aligned} U &= \frac{\xi'_0 - (1 - \lambda a)x'_0}{a^{\frac{3}{2}}}, \\ V &= \frac{\eta'_0 - (1 - \lambda b)y'_0}{b^{\frac{3}{2}}}, \\ W &= \frac{\zeta'_0 - (1 - \lambda c)z'_0}{c^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Si l'une des trois quantités U, V, W est nulle, les égalités (4) prouvent que les trois autres le sont et les projections de la vitesse initiale $N_0 W_0$ sont

$$(5) \quad \xi'_0 = (1 - \lambda a)x'_0, \quad \eta'_0 = (1 - \lambda b)y'_0, \quad \zeta'_0 = (1 - \lambda c)z'_0.$$

Si aucune des trois quantités U, V, W n'est nulle, les relations (4) inversées s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{U} \cot \sqrt{a} t + \frac{x'_0}{U \sqrt{a}} &= \frac{y_0}{V} \cot \sqrt{b} t + \frac{y'_0}{V \sqrt{b}} \\ &= \frac{z_0}{W} \cot \sqrt{c} t + \frac{z'_0}{W \sqrt{c}}; \end{aligned}$$

elles ne peuvent pas être *identiquement* vérifiées lorsque a, b, c sont différents.

Si $a = b = c$, on peut y satisfaire en posant

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{x_0}{U} = \frac{y_0}{V} = \frac{z_0}{W}, \\ \frac{x'_0}{U} = \frac{y'_0}{V} = \frac{z'_0}{W}. \end{cases}$$

Ceci exige que

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{y'_0}{y_0} = \frac{z'_0}{z_0},$$

c'est-à-dire que la force soit une attraction de centre O, proportionnelle à la distance, et que la vitesse initiale soit dirigée suivant OM.

Ces conditions remplies, les relations (6) se réduisent à

$$\frac{\xi'_0}{x'_0} = \frac{\eta'_0}{y'_0} = \frac{\zeta'_0}{z'_0},$$

qui expriment que $N_0 W_0$ est également dirigée suivant la même droite ON_0 confondue avec OM_0 .

Ce cas particulier est évident. En effet, si la force est une attraction de centre O et que la vitesse initiale passe par O, la trajectoire de M est la droite OM_0 qui contient toujours OF. Pour que N reste sur OF, il faut et il suffit qu'il reste sur OM_0 , et pour cela il faut et il suffit que sa vitesse initiale passe par O.

Si l'on écarte ce cas particulier, on voit que les conditions (5) sont les conditions générales cherchées. En portant les valeurs initiales données par les égalités (3) et (5) dans les formules (2), elles deviennent

$$\xi = (1 - \lambda a)x, \quad \eta = (1 - \lambda b)y, \quad z = (1 - \lambda c)z.$$

Elles expriment que le rapport $\frac{MN}{MF}$ reste *constant* et égal à λ .

Si, au commencement du mouvement, le point N est dans un des plans de coordonnées, par exemple si $\zeta_0 = 0$ sans que z_0 soit nul, ceci exige

$$1 - \lambda c = 0, \quad \lambda = \frac{1}{c},$$

et alors z reste constamment nulle. Le point N reste dans ce plan de coordonnées.

4° Les coordonnées du point W_0 sont :

$$x_2 = \xi_0 + \xi'_0 = (1 - \lambda a)(x_0 + x'_0),$$

$$y_2 = \eta_0 + \eta'_0 = (1 - \lambda b)(y_0 + y'_0),$$

$$z_2 = \zeta_0 + \zeta'_0 = (1 - \lambda c)(z_0 + z'_0).$$

Quand λ varie le point W_0 décrit donc *une droite*. Les coordonnées d'un point quelconque P de la droite $N_0 W_0$ sont :

$$x = \xi_0 + \mu \xi'_0 = (1 - \lambda a)(x_0 + \mu x'_0),$$

$$y = \eta_0 + \mu \eta'_0 = (1 - \lambda b)(y_0 + \mu y'_0),$$

$$z = \zeta_0 + \mu \zeta'_0 = (1 - \lambda c)(z_0 + \mu z'_0).$$

Les coordonnées du point P sont ainsi exprimées en fonction de deux paramètres λ et μ . Le lieu de P est évidemment un parabolôïde hyperbolique dont les deux systèmes de génératrices sont ainsi mis en évidence.

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

1° *Trouver une série entière en x qui satisfasse à l'équation différentielle*

$$(E) \quad 9(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 9x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

et aux conditions initiales suivantes : pour $x = 0$, la série doit prendre la valeur 1 et sa dérivée doit prendre la valeur $-\frac{1}{3}$.

2° *Déterminer l'intervalle de convergence de la*

série trouvée. La fonction de x que définit cette série dans son intervalle de convergence sera désignée par $f(x)$.

3° Montrer qu'il existe une infinité de changements de la variable indépendante, de la forme $t = \varphi(x)$, qui transforment identiquement l'équation (E) en une équation linéaire à coefficients constants; trouver tous ces changements de variables.

4° L'un des changements de variables précédents est $x = \cos 3t$. Partant de là, prouver que les formules

$$x = \cos 3t, \quad y = \cos t + \sin t$$

définissent, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, le même arc de courbe que l'équation $y = f(x)$, pourvu que t varie dans un intervalle qu'on déterminera.

5° Les équations paramétriques précédentes représentent, quand on n'y limite pas la variabilité du paramètre, une courbe (C). Montrer que cette courbe est coupée par une droite $y = h$ en deux points au plus et que ces points existent pour toutes les valeurs de la constante h qui sont comprises entre deux certains nombres α et β . Ces points seront désignés par M et M'.

6° On imagine qu'on divise le segment de droite MM' en trois parties égales; soient P et P' les points de division. Calculer l'aire comprise entre les arcs de courbe que décrivent P et P' quand h varie de α à β .

1° Soit

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \dots$$

la série entière vérifiant l'équation (E).

Calculons $\frac{d\gamma}{dx}$ et $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$ et ordonnons suivant les puissances croissantes de x la série

$$9(1-x^2)\frac{d^2\gamma}{dx^2} - 9x\frac{d\gamma}{dx} + \gamma$$

et écrivons que tous les coefficients de cette série sont nuls. Nous obtenons ainsi les équations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 + 2.9a_2 &= 0, \\ -2.4a_1 + 9.3.2a_3 &= 0, \\ -5.7a_2 + 9.4.3a_4 &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ -(3m-1)(3m+1)a_m + 9(m+2)(m+1)a_{m+2} &= 0. \end{aligned}$$

On en tire d'abord pour les coefficients d'indices pairs

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{9} \frac{a_0}{2}, \\ a_4 &= +\frac{1}{9} \frac{5.7}{3.4} a_2, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{2p+2} &= \frac{1}{9} \frac{(6p-1)(6p+1)}{(2p+1)(2p+2)} a_{2p}, \end{aligned}$$

et, en multipliant membres à membres,

$$a_{2p+2} = \frac{-1}{9^{p+1}} \frac{5.7.11.13\dots(6p-1)(6p+1)}{(2p+2)!} a_0,$$

Au numérateur du second membre figurent les nombres impairs où l'on a supprimé les multiples de 3. On a donc

$$\begin{aligned} 5.7.11.13\dots(6p-1)(6p+1) &= \frac{1.3.5.7.9\dots(6p+1)}{3.9.15\dots(6p-3)} \\ &= \frac{1.3.5.7.1.9\dots(6p+1)}{3^p.1.3.5\dots(2p-1)} = \frac{(2p+1)(2p+3)\dots(6p+1)}{3^p}. \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire

$$a_{2p+2} = - \frac{(2p+1)(2p+3)\dots(6p+1)}{3^{3p+2}(2p+2)!} a_0.$$

Pour les coefficients d'indices impairs, on a

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{9} \frac{2.4}{2.3} a_1, \\ a_5 &= \frac{1}{9} \frac{8.10}{4.5} a_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_{2p+1} &= \frac{1}{9} \frac{(6p-4)(6p-2)}{2p(2p+1)} a_{2p-1}; \end{aligned}$$

et, en multipliant membres à membres,

$$a_{2p+1} = \frac{1}{9^p} \frac{2.4.8.10\dots(6p-4)(6p-2)}{(2p+1)!} a_1.$$

En opérant comme plus haut, on trouve

$$a_{2p+1} = \frac{2p(2p+2)\dots(6p-4)(6p-2)}{3^{3p-1}(2p+1)!} a_1.$$

Pour satisfaire aux conditions initiales de l'énoncé, on prend

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = -\frac{1}{3};$$

on en conclut

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad a_1 = -\frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{3^2.2}, \quad a_3 = -\frac{2.4}{3^3.3!}, \quad \dots, \\ a_{2p} &= -\frac{(2p-1)(2p+1)(2p+3)\dots(6p-5)}{3^{3p-1}(2p)!}, \\ a_{2p+1} &= -\frac{2p(2p+2)(2p+4)\dots(6p-2)}{3^{3p}(2p+1)!}. \end{aligned}$$

2°. Pour déterminer l'intervalle de convergence, considérons les deux séries formées par les termes de rang

pair et de rang impair. On a d'abord

$$\frac{a_{2p+1} x^{2p+2}}{a_{2p} x^{2p}} = \frac{(6p-1)(6p+1)}{3^2(2p+1)(2p+2)} x^2$$

et

$$\frac{a_{2p+1} x^{2p+1}}{a_{2p-1} x^{2p-1}} = \frac{(6p-4)(6p-2)}{3^2 \cdot 2p(2p+1)} x^2.$$

Quand p croît indéfiniment, chacun de ces rapports tend vers x^2 . Chacune de ces séries sera donc convergente si $x^2 < 1$.

L'intervalle de convergence est donc $-1, +1$.

3° Posons

$$t = \varphi(x);$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \varphi'(x)$$

et

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \varphi'^2(x) + \frac{dy}{dt} \varphi''(x).$$

L'équation (E) devient, après le changement,

$$9(1-x^2) \varphi'^2(x) \frac{d^2 y}{dt^2} + 9[(1-x^2) \varphi''(x) - x \varphi'(x)] \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Remarquons que le coefficient de $\frac{dy}{dt}$ est égal à la dérivée par rapport à x du coefficient de $\frac{d^2 y}{dt^2}$ divisée par $2\varphi'(x)$. Si donc le coefficient de $\frac{d^2 y}{dt^2}$ est constant, celui de $\frac{dy}{dt}$ sera nul.

Pour satisfaire à l'énoncé, il suffit donc de prendre

$$9(1-x^2) \varphi'^2(x) = 9C^2$$

ou

$$\varphi'(x) = \frac{C}{\pm \sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi(x) = C \arccos x,$$

C étant une constante arbitraire.

(374)

L'équation (E) devient alors

$$(E') \quad 9C^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

4° On a

$$t = C \arccos x.$$

Posons $C = \frac{1}{3}$, on en tire

$$x = \cos 3t.$$

Pour que la série soit convergente, il faut faire varier x de -1 à $+1$. Parmi les diverses valeurs de t correspondantes, choisissons l'intervalle $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ dans lequel x s'annule pour $t = \frac{\pi}{2}$.

Dans cet intervalle, t croît avec x ; donc $\varphi'(x)$ est positif, et l'on a

$$\varphi'(x) = \frac{dt}{dx} = + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}.$$

L'équation (E') devient

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

Son intégrale générale est

$$y = A \cos t + B \sin t.$$

Pour trouver celle qui correspond à $y = f(x)$, remarquons que, pour $x = 0$, on a

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3};$$

par suite, comme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}},$$

(375)

on en conclut que, pour $t = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, on doit avoir

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -1,$$

ce qui donne, pour les constantes,

$$A = B = 1.$$

La courbe

$$(C) \quad x = \cos 3t, \quad y = \cos t + \sin t \quad .$$

coïncide donc, lorsqu'on fait varier t de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$, avec l'arc de la courbe $y = f(x)$, quand x varie de -1 à $+1$.

5° Les points d'intersection de la courbe (C) avec la droite $y = h$ correspondent aux valeurs du paramètre t qui sont racines de l'équation

$$\cos t + \sin t = h,$$

ou, en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Cette dernière n'aura de solution que si h reste compris entre $-\sqrt{2}$ et $+\sqrt{2}$. Pour une telle valeur de h , soit θ l'angle compris entre 0 et π , tel qu'on ait

$$\cos \theta = \frac{h}{\sqrt{2}},$$

les solutions de l'équation sont alors données par la formule

$$t = \frac{\pi}{4} \pm \theta + 2k\pi.$$

A ces valeurs de t ne correspondent que deux points et

deux seulement :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} & \left\{ \begin{array}{l} x = \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 3\theta \right), \\ y = \sqrt{2} \cos \theta; \end{array} \right. \\ \mathbf{M}' & \left\{ \begin{array}{l} x = \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 3\theta \right), \\ y = \sqrt{2} \cos \theta. \end{array} \right. \end{aligned}$$

6° Le segment PP' est le *tiers* du segment MM'.
L'élément différentiel de l'aire cherchée est donc

$$\begin{aligned} \overline{PP'} dy &= \frac{1}{3} \overline{MM'} dy \\ &= \frac{1}{3} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} - 3\theta \right) - \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 3\theta \right) \right] dy \\ &= \frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{4} \sin 3\theta (-\sqrt{2} \sin \theta d\theta) \\ &= -\frac{2}{3} \sin 3\theta \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Le signe de cet élément différentiel, quand θ varie de 0 à π , dépend de celui de $\sin 3\theta$. Il est négatif quand θ croît de 0 à $\frac{\pi}{3}$, positif quand θ croît de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{2\pi}{3}$ et négatif quand θ croît de $\frac{2\pi}{3}$ à π . La courbe comprend donc trois boucles.

L'aire S_1 de la première boucle est

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{3} \sin 3\theta \sin \theta d\theta, \\ S_1 &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 4\theta - \cos 2\theta) d\theta, \\ S_1 &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

(377)

L'aire S_2 de la seconde boucle est

$$S_2 = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Enfin, l'aire S_3 de la troisième boucle est

$$S_3 = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{4} \sin 4\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right|_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Si l'on convient d'affecter les aires du signe (+) ou du signe (—) suivant qu'elles sont à gauche ou à droite d'un mobile parcourant la courbe (C) dans le sens des θ croissants, l'aire totale est

$$S = -(S_1 + S_2 + S_3) = 0.$$

Si l'on prend les aires géométriques des boucles, l'aire totale est

$$S = -S_1 + S_2 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

COMPOSITION DE CALCUL NUMÉRIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

L'élongation u d'une vibration amortie a pour expression, en fonction du temps t ,

$$u = U \frac{e^{-st}}{\cos \varphi} \cos(rt - \varphi) \quad \left(s = \frac{\sin \varphi}{\theta}, r = \frac{\cos \varphi}{\theta}, e = 2,718 \right).$$

1° *Quelles sont les valeurs de t qui donnent à u*

soit une valeur nulle, soit une valeur maximum ou minimum?

2° Pour $U = 1^{\text{cm}}$, $\theta = 1^{\text{sec}}$, $\varphi = 45^\circ$, construire une table des valeurs de u en fonction de t , du premier maximum de u à son premier minimum et procédant par huitièmes de cet intervalle.

3° Comment cette table peut-elle être étendue à l'intervalle suivant?

[NOTA. — Les calculs numériques devaient être effectués à la règle à calcul (1).]

1° La fonction u s'annule pour $\cos(rt - \varphi) = 0$, où
 $rt = \varphi + \frac{2n+1}{2} \pi$, d'où

$$(1) \quad t = \frac{\theta}{\cos \varphi} \left(\varphi + \frac{2n+1}{2} \pi \right).$$

Quant à sa dérivée, elle s'annule pour

$$r \sin(rt - \varphi) + s \cos(rt - \varphi) = 0$$

ou

$$\cos \varphi \sin(rt - \varphi) + \sin \varphi \cos(rt - \varphi) = 0.$$

c'est-à-dire

$$\sin rt = 0,$$

d'où

$$rt = n\pi$$

et

$$(2) \quad t = \frac{n\pi\theta}{\cos \varphi},$$

les valeurs *paires* de n correspondant à des *maxima*,
 les valeurs *impaires* à des *minima*.

(1) C'était la première fois que ce mode de calcul était imposé aux candidats à l'École Polytechnique; aussi avons-nous pensé qu'il n'était pas inutile d'indiquer ici la façon détaillée dont il fallait procéder.

Le premier maximum a donc lieu pour $t = 0$ (il est égal à U) et le premier minimum pour $t = \frac{\pi\theta}{\cos\varphi}$.

2° Avec les données, la valeur de u devient

$$u = \frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}}{\cos 45^\circ} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou, si l'on pose $\frac{t}{\sqrt{2}} = \tau$,

$$u = \frac{e^{-\tau}}{\cos 45^\circ} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right)$$

dont il s'agit de calculer les valeurs depuis $\tau = 0$ jusqu'à $\tau = \pi$, par échelons de $\frac{\pi}{8}$.

Cette formule pouvant s'écrire

$$\frac{u}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \tau\right)} = \frac{e^{-\tau}}{\sin 45^\circ},$$

on voit que, plaçant l'échelle S' des sinus de la réglette en contact avec l'échelle N_1 des nombres, de même module, de la règle (c'est-à-dire, dans la règle Mannheim, l'échelle supérieure) lorsqu'on aura mis le trait 45° de S' en coïncidence avec le trait $e^{-\tau}$ de N_1 , le trait $\frac{3\pi}{4} - \tau$ de S' sera en coïncidence avec le trait de N_1 , dont la lecture sera la valeur de u .

Puisque, d'ailleurs, on sait que, pour $\tau = 0$ et $\tau = \frac{3\pi}{4}$, on a respectivement $u = 1$ et $u = 0$, il suffit de faire le calcul pour les sept valeurs de τ :

$$\frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{8}, \quad \frac{7\pi}{8}, \quad \pi.$$

Il s'agit d'abord de calculer les valeurs correspon-

dantes de $e^{-\tau}$. Pour cela, ayant écrit les sept valeurs précédentes en nombres

0,3927 0,7854 1,1781 1,5708 1,9635 2,7489 3,1416

on multiplie chacun de ces nombres, au moyen de la règle (opération classique), par la valeur de $\log e$ obtenue sur la règle. Pour cela l'échelle P' E' des *parties égales* de la réglette étant disposée (avec le sens croissant de gauche à droite) de façon que son origine O coïncide avec l'origine 1 de l'échelle des nombres N_2 (module double de celui de N_1) de la règle, on constate que le trait 2,718 de N_2 coïncide avec le trait 434 de P' E' et, par suite,

$$\log e = 0,434.$$

La multiplication par ce nombre (lu sur N_1 et avec lequel on amène en coïncidence le trait 1 de l'échelle des nombres N'_1 de la réglette) des sept nombres précédents (lus aussi sur N'_1) donne (par lecture des coïncidences sur N_1)

0,675 0,456 0,308 0,208 0,140 0,064 0,0432

qui sont les valeurs de $e^{-\tau}$.

On peut dès lors effectuer le calcul des valeurs correspondantes de u (ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus) et l'on trouve comme valeurs numériques

0,882 0,645 0,402 0,208 0,076 0,0347 0,0432

Le calcul n'a d'ailleurs pas à être effectué pour la quatrième et la dernière, respectivement égales aux valeurs correspondantes de $e^{-\tau}$.

Transformant en nombres les valeurs correspondantes de $t = \tau\sqrt{2}$ (ce qui se fait immédiatement avec

la règle), on obtient finalement le Tableau demandé :

t en sec.	u en cm.
0	1
0,558	0,882
1,116	0,645
1,674	0,402
2,232	0,208
2,790	0,076
3,348	0
3,906	-0,0347
4,465	-0,0432

3° Si τ' est une valeur de τ prise dans le second intervalle, de π à 2π , et si u' est la valeur correspondante de u , nous avons, en posant $\tau' = \tau + \pi$,

$$u' = \frac{e^{-(\tau+\pi)} \cos\left(\tau + \pi - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 45^\circ} = -e^{-\pi} \frac{e^{-\tau} \cos\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 45^\circ} = -e^{-\pi} u.$$

Les valeurs u' du second intervalle s'obtiennent donc en multipliant les valeurs correspondantes du premier par $-e^{-\pi} = -0,0432$.