

J. HADAMARD

Sur un problème de cinématique navale

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 337-361

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__337_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R1a]

SUR UN PROBLÈME DE CINÉMATIQUE NAVALE :

PAR M. J. HADAMARD.

Parmi les problèmes que les marins classent dans la *Cinématique navale* figure celui des *barrages oscillants*, ainsi conçu (1) :

« Des mobiles, de vitesse a constante en grandeur, doués d'un rayon de vision V , ont à couvrir, en oscillant dessus, une ligne droite fixe de longueur l , dite *de barrage*, de manière à empêcher des mobiles B , de vitesse b , de franchir la ligne sans être pris dans une circonférence V , quelle que soit la direction attribuée à b . »

Si cette condition est vérifiée, on dit que la droite de barrage *est gardée*.

On désigne par K le rapport $\frac{a}{b}$, et l'on suppose $K \geq 1$: autrement dit, les navires barreaux sont au moins aussi rapides que leurs adversaires.

Tout se passe dans un plan : on ne fait intervenir ni vent, ni courant.

On traite habituellement ce problème en assujettissant les mobiles adversaires B à suivre des routes *rectilignes*, leur vitesse étant constante en grandeur et direction et toujours égale à b .

Il est clair cependant que, si les B sont des navires

(1) J'emprunte cet énoncé (en le modifiant conformément à ce qui va être dit), ainsi que les notations, à une brochure de M. le capitaine de vaisseau Vidal (Paris, Challamel, éditeur, 17, rue Jacob, 1909).

ennemis, rien ne les oblige à marcher en ligne droite, ni à donner toujours la vitesse maxima dont ils disposent.

Il est donc logique de supposer :

1° Que les mobiles B peuvent suivre n'importe quelle route droite, brisée ou curviligne;

2° Qu'ils peuvent avoir une vitesse variable, pourvu qu'elle reste *au plus* égale à b ; le barrage devant être gardé quelles que soient la forme de la route en question et la loi de variation de vitesse, sous la condition qui vient d'être indiquée.

C'est le problème ainsi posé que je me propose d'étudier. Contrairement à ce qui semblerait au premier abord, il conduit à des résultats plus simples que celui qui correspond à l'hypothèse des routes rectilignes. On peut, en effet, au moins dans les cas que je vais examiner, énoncer des conditions *nécessaires et suffisantes* pour que la garde soit parfaite.

1. J'emploierai un mode de figuration bien connu et qui consiste à représenter d'une manière différente un même point m du plan de la figure, suivant les instants où l'on considère ce point.

A cet effet, on porte verticalement (le plan de la figure primitive étant considéré comme plan horizontal), à partir de m , une cote M mesurée par le nombre t , c'est-à-dire par le même nombre que le *temps*.

Le point M est dit *point complet* : sa connaissance détermine l'ensemble d'un point m du plan horizontal et d'un instant, de sorte qu'un point complet M peut encore se représenter par un symbole de la forme (m, t) .

Le mouvement à étudier sera ainsi représenté par une figure dans l'espace à trois dimensions.

La droite de barrage, considérée pour toutes les valeurs réelles de t , donnera, au total, un plan vertical que nous appellerons *plan du tableau* et qui est évidemment un plan de symétrie de la figure.

2. Une oscillation simple d'un seul mobile barreur A_1 , effectuée avec la vitesse constante a , sera représentée par un segment de droite de *pente* $\frac{1}{a}$, situé dans le plan du tableau et ayant pour projection horizontale l'amplitude d de l'excursion du mobile.

D'autre part, à chaque instant de son mouvement, notre mobile A_1 est susceptible de voir toute l'étendue d'un cercle de rayon V dont il est le centre.

Lorsqu'il parcourt son segment de droite, le cercle en question, ou, plus exactement, le cercle *complet* qui lui correspond dans l'espace à trois dimensions lorsqu'on tient compte de la valeur de t , engendre un *cylindre circulaire oblique* limité C_1 .

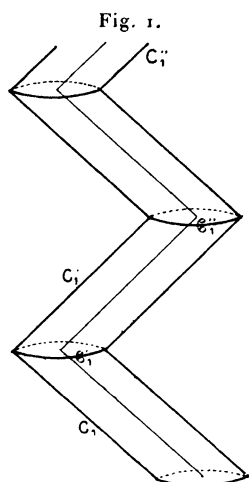
Si maintenant, comme cela aura lieu dans tout ce qui va suivre, le mobile A_1 dont il s'agit est supposé osciller indéfiniment (avec la même vitesse constante $\frac{1}{a}$) le long d'un seul et même segment de droite du plan horizontal, on aura une série de cylindres successifs $C_1, C'_1, C''_1, \dots$ (*fig. 1*) dont deux consécutifs quelconques seront symétriques l'un de l'autre par rapport à leur plan de base commun.

Tous ces cylindres sont tangents aux deux plans Π et Π' qui sont menés parallèlement au plan du Tableau, de part et d'autre de ce plan et à une distance V .

3. Le fait qu'un mobile B n'est vu à aucun moment par A_1 se traduit par cette circonstance que la trajectoire du point complet correspondant n'a de point commun avec aucun des cylindres $C_1, C'_1, \dots$

Le fait que la vitesse de B est au plus égale à b s'exprime en disant que la trajectoire de son point complet a partout une pente d'au moins $\frac{1}{b}$.

Toutes les trajectoires satisfaisant à cette condition



et qui passent par un point complet déterminé M sont évidemment intérieures au cône de révolution Γ_M qui a pour sommet ce point, pour axe la verticale correspondante et dont le demi-angle au sommet est $\arctan b$.

3. Avant de nous demander si un point m du plan horizontal est *gardé*, nous nous poserons la même question pour un point complet $M(m, t)$.

Un tel point sera dit *gardé* s'il est impossible d'y accéder, en partant de la portion de l'espace située au delà de Π (côté par où sont supposés arriver les mobiles B) par un chemin de pente partout au moins égale à $\frac{1}{b}$ sur lequel t soit croissant (de sorte qu'un tel chemin doit être entièrement compris dans la nappe

inférieure du cône Γ_M); ou s'il est impossible d'y accéder à partir de la portion de l'espace située au delà de Π' par un chemin de pente au moins égale à $\frac{1}{b}$ le long duquel t soit décroissant (chemin compris dans la nappe supérieure de Γ_M).

En langage ordinaire, cela signifie qu'un mobile B ne peut arriver en m à l'instant t (en venant de la région du plan horizontal située au delà de Π) sans avoir été vu; ou que, s'il se trouve en m à cet instant t , il ne peut, de là, passer dans la région située au delà de Π' sans être vu.

Si c'est la première circonstance qui se produit, on dira que M est gardé *avant*; si c'est la seconde, qu'il est gardé *arrière*.

On peut d'ailleurs se borner à étudier à ce point de vue les points du plan du tableau. Dans ce cas, par raison de symétrie, les plans Π et Π' se comportent de manière parfaitement identique, de sorte qu'on n'a pas à distinguer entre une région de départ et une région d'arrivée.

Nous profiterons de cette remarque pour modifier légèrement la définition donnée plus haut: pour dire qu'un point (complet) M est gardé, nous demanderons qu'on ne puisse y accéder *d'aucune des régions extérieures aux plans Π , Π'* par un chemin de pente au moins égale à $\frac{1}{b}$ sur lequel t soit constamment croissant (garde avant) ou constamment décroissant (garde arrière).

Nous serons sûrs que les résultats ainsi obtenus seront valables pour le problème primitif, pourvu que, en dernière analyse, nous ne les appliquions qu'aux points du plan du tableau.

Enfin, pour qu'un point m de la ligne de barrage

soit gardé, il sera évidemment nécessaire et suffisant que toute sa verticale le soit.

4. Cherchons quels seront les points M de l'espace qui seront gardés avant par une oscillation simple déterminée du mobile A_1 .

Ces points M seront caractérisés par ce fait que toutes les génératrices de la nappe inférieure du cône Γ_M seront coupées par le cylindre C_1 représentatif de cette oscillation.

Autrement dit, le cône Γ_M (réduit à sa nappe inférieure) et le cylindre (limité) C_1 devront se couper avec *pénétration* (et non avec arrachement).

Il est clair (en vertu de la convexité des corps en présence) que cette condition est nécessaire et suffisante.

La région de l'espace formée des points qui la vérifient est aisée à déterminer. Elle est limitée (*fig. 2*) par des portions des surfaces suivantes :

1° Surface du cylindre (dont le volume est, bien entendu, considéré comme faisant entièrement partie de la région en question);

2° Surfaces latérales limitées des deux cônes de révolution qui ont pour bases respectives les deux bases du cylindre et pour angle au sommet celui des cônes Γ , les sommets S_1 , S'_1 étant au-dessus des plans de bases;

3° Plans tangents communs aux deux cônes Γ_{S_1} , $\Gamma_{S'_1}$ et au cylindre, l'arête du dièdre ainsi formé n'étant autre que la droite $S_1 S'_1$.

La figure ainsi délimitée sera dite *solide d'ombre avant*. Elle peut être, en effet, considérée comme tout analogue au *cône d'ombre* qui intervient en Optique et dans la théorie des éclipses, le Soleil étant supposé

à l'infini dans la direction des t négatifs, avec un diamètre apparent égal à l'angle au sommet des cônes Γ .

Les points qui sont gardés arrière par la même

Fig. 2.

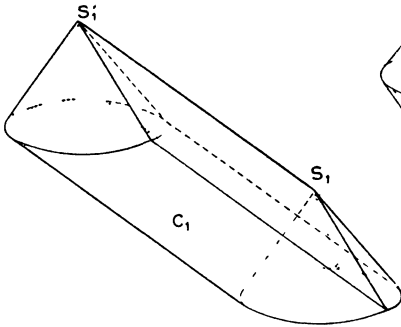
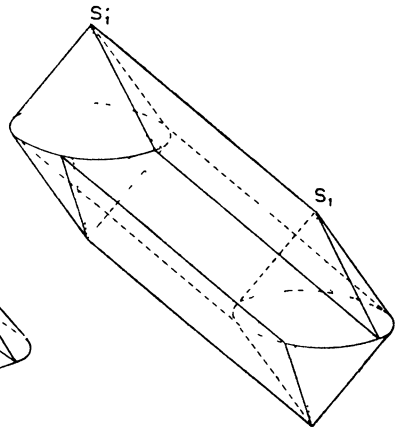


Fig. 3.



oscillation de A_1 forment, de même, le *solide d'ombre arrière*, symétrique du premier par rapport au centre de figure de C_1 .

La figure 3 montre l'ensemble du cylindre et de ses deux solides d'ombre. On remarquera que, dans la délimitation de ce solide total, interviennent les quatre plans tangents au cylindre, dont les génératrices de contact divisent ce dernier en quatre parties :

Une bande *supérieure*, celle qui est intérieure au solide d'ombre avant ;

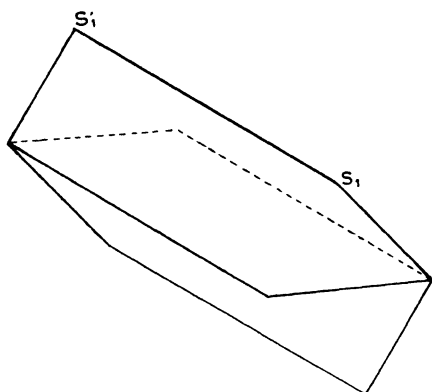
Une bande *inférieure*, intérieure au solide d'ombre arrière ;

Deux bandes *latérales*, seules parties du cylindre qui prennent part à la délimitation du solide de la figure 3.

Le solide d'ombre avant a pour section par le plan

du tableau un pentagone; le solide total d'ombre avant

Fig. 4.



et arrière, un hexagone (ces deux polygones sont représentés ensemble sur la figure 4).

4 bis. Les points des bandes latérales sont, d'autre part, les seuls points de la surface cylindrique où le plan tangent ait une pente au moins égale à $\frac{1}{b}$. En chacun de ces points, à l'exclusion du reste de la surface, on peut mener à celle-ci deux tangentes de pente $\frac{1}{b}$.

Chaque bande latérale comprend la génératrice de contact du cylindre avec un des plans Π , Π' : elle est divisée par cette génératrice en deux parties, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*.

Soient tracées, en un point de la partie supérieure d'une bande latérale, les deux tangentes de pente $\frac{1}{b}$. Nous noterons que, sur chacune d'elles, le sens *descendant* (c'est-à-dire celui des t décroissants) est aussi celui suivant lequel la distance au plan du tableau,

ou, comme nous dirons encore, l'*éloignement* (en considérant le plan du tableau comme plan vertical de projection), va en croissant ⁽¹⁾ en valeur absolue.

Notons enfin que tout point du solide d'ombre (avant ou arrière) extérieur au cylindre, mais compris entre les deux plans de bases, a un éloignement plus petit (en valeur absolue) que celui d'un point quelconque des bandes latérales. Ce fait, aisément reconnaissable à l'inspection des figures 2 et 3, peut être considéré comme une conséquence du précédent : on obtient, en effet, l'un quelconque des points en question situés sur la surface du solide d'ombre en partant d'un point du cylindre situé tout au plus à la frontière des bandes latérales, et suivant une droite de pente $\frac{1}{b}$ dans un sens tel que l'éloignement soit assurément décroissant.

§. Nous pouvons maintenant aborder le premier problème que nous nous proposons d'examiner, savoir :

Quel est, sur la ligne de barrage, le segment gardé par les oscillations d'un seul mobile A_1 ?

Ces oscillations sont supposées, comme précédemment, toutes effectuées suivant un seul même segment $\alpha_1 \alpha'_1$ de la ligne de barrage, segment ainsi parcouru alternativement dans un sens et dans l'autre sans interruption.

Un point du plan du tableau ne pourra évidemment, dans ces conditions, être gardé que s'il est projeté horizontalement en un point du segment $\alpha_1 \alpha'_1$.

(¹) Ceci se déduit aisément de la construction qui donne les directions des tangentes en question par l'intersection d'un cône Γ avec un plan parallèle au plan tangent du cylindre.

Le point M du plan du tableau sera, d'autre part, évidemment gardé avant s'il est dans l'ombre avant d'un des cylindres représentatifs des oscillations de A_1 .

Si, au contraire, M n'est pas dans l'ombre avant du cylindre *situé immédiatement au-dessous de lui*, et si, par conséquent, il n'est pas gardé avant par ce cylindre, *il est impossible que cette garde avant soit complétée par les cylindres plus éloignés.*

Pour l'établir, il suffira de prouver ⁽¹⁾ que, si une génératrice du cône Γ_M ne rencontre pas le premier cylindre $C_1^{(i)}$ situé au-dessous de M , elle ne rencontre aucun des cylindres successifs $C_1^{(i-1)}$, $C_1^{(i-2)}$..., situés au-dessous du premier.

Or $C_1^{(i-1)}$ est la symétrique de $C_1^{(i)}$ par rapport à un plan horizontal $P^{(i)}$. Soit l le point où la génératrice en question rencontre $P^{(i)}$. Pour que MI prolongé ne rencontre pas $C_1^{(i-1)}$, il faut et il suffit que sa symétrique par rapport à $P^{(i)}$ (autrement dit, la droite IJ qu'on déduit de MI par réflexion sur $P^{(i)}$) ne rencontre pas $C_1^{(i)}$.

D'autre part, le plan vertical mené par MI coupe $C^{(i)}$ suivant une figure convexe qui, nous le supposons, est sans point commun avec MI et, par conséquent, située tout entière d'un seul et même côté de cette droite, celui où est située la verticale descendante de M . Mais la demi-droite IJ est visiblement située, par rapport à MI , du côté opposé à celui-là : elle ne rencontre donc pas $C^{(i)}$, et MI , prolongé, ne rencontre pas $C_1^{(i-1)}$.

Le même raisonnement permet de déduire de là

(1) La démonstration pourrait d'ailleurs également être faite par la voie qui sera employée plus loin (n° 9 et suivants).

que cette droite MI ne rencontre pas $C_1^{(i-2)}$; et ainsi de suite.

Notre conclusion est, dès lors, démontrée.

Un point M n'est donc gardé avant que s'il est dans l'ombre avant du cylindre inférieur le plus voisin.

Il n'est, de même, gardé arrière que s'il est dans l'ombre arrière du premier cylindre situé au-dessus de lui.

Or, dans notre manière actuelle de poser le problème, si un point complet n'est ni gardé avant, ni gardé arrière, il n'est pas gardé du tout.

Donc, finalement, nous obtiendrons tous les points de l'espace qui sont gardés par les oscillations de A_1 , en prenant l'ensemble des ombres avant et arrière des cylindres représentatifs correspondants.

Il nous suffira, d'ailleurs, de considérer les points du plan du tableau : sur celui-ci, comme nous l'avons vu, les ombres totales (avant et arrière) forment une série d'hexagones.

6. En ce qui regarde la disposition mutuelle de ceux-ci, deux cas sont à distinguer :

Ou bien la hauteur des cônes (cône de sommet S_1 , par exemple), qui interviennent dans la formation du solide d'ombre, est plus petite que celle du cylindre;

Autrement dit, en langage ordinaire, le temps mis par un mobile B pour parcourir le rayon de vision V est inférieur au temps d'oscillation de A_1 ;

Ou c'est l'inverse qui a lieu.

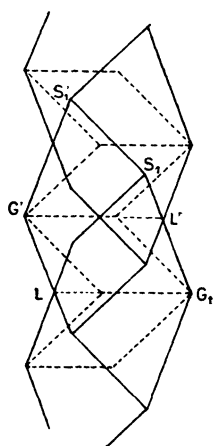
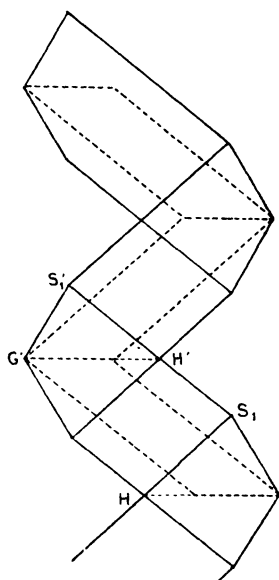
Le premier cas est celui que nous appellerons, pour abrégé, celui des *oscillations longues*; il est caractérisé par l'inégalité

$$(1) \quad KV < d.$$

Alors l'intersection des périmètres de deux hexagones consécutifs (ou, ce qui revient au même par raison de symétrie, l'intersection du périmètre d'un hexagone avec un plan de base du cylindre qui lui donne naissance) a lieu, comme l'indique la figure 5,

Fig. 5.

Fig. 5 bis.



en un point d'une droite telle que $S_1 S_1'$ (point H' de la figure 5). Un tel point H' est séparé du point de la base du cylindre ⁽¹⁾ qui en est le plus éloigné (point G' de la figure 5) par une distance égale à $V(1 + K)$.

Sur l'autre plan de base du même cylindre, le point analogue à H' sera le symétrique H de H' , par rapport au centre du cylindre.

⁽¹⁾ La base à laquelle il est fait allusion ici est celle dont le plan contient H' .

Le segment gardé de la ligne de barrage sera la projection horizontale de HH'.

Les verticales comprises tout entières dans l'ensemble des hexagones d'ombre sont, en effet, celles qui passent entre H et H'.

La longueur de ce segment est $2VK - d$.

Si VK est inférieur à $\frac{d}{2}$, aucun point n'est gardé par les oscillations de A_1 .

7. Le second cas, celui des *oscillations courtes*, est caractérisé par l'inégalité

$$(I) \quad KV > d.$$

Alors le plan de base commun à deux cylindres consécutifs coupe le périmètre de l'hexagone d'ombre totale déduit de l'un quelconque d'entre eux, d'une part au point précédemment considéré (point G' de la figure 5 bis) situé sur le cercle de base, d'autre part en un point L' (fig. 5 bis) situé non plus sur une droite S, S' , mais sur une génératrice d'un cône Γ (sur la figure 5 bis, le cône Γ_s).

La distance $G'L'$ est égale à $2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right)$.

Soit L le symétrique de L' par rapport au centre d'un des cylindres aux plans de base desquels il appartient.

Le segment gardé sera *la projection horizontale de LL'* ; sa longueur, de $2V + d\left(1 - \frac{2}{K}\right)$.

Le nombre des hexagones ayant une même partie commune peut d'ailleurs être ici plus ou moins considérable, suivant que la hauteur d'un cylindre est contenue un plus ou moins grand nombre de fois dans celle d'un cône. Mais, quel que soit ce nombre d'hexagones se superposant, ceux qui sont immédiatement

consécutifs fournissent à eux seuls les abscisses extrêmes, à droite ou à gauche, des verticales entièrement recouvertes par leur ensemble, de sorte que l'évaluation précédente est indépendante des circonstances qui peuvent se produire à cet égard. Nous avons, en effet ⁽¹⁾, constaté qu'un point de l'espace n'est utilement gardé que par les deux cylindres *les plus voisins* de lui.

En résumé, si λ désigne la longueur gardée et si, laissant V et K constants, on prend d comme variable, la ligne représentative de λ en fonction de d est composée de deux segments de droites dont le premier joint le point $(0, 2V)$ au point (VK, VK) tandis que le second part de l'extrémité du premier et aboutit au point $(2VK, 0)$.

Pour $1 < K < 2$, le premier segment de droite est descendant comme le second (tout en étant moins incliné que lui), de sorte que le maximum de λ a lieu pour le barrage *entièrement fixe*. Au contraire, pour $K > 2$, le maximum a lieu pour $d = VK$.

8. Il est essentiel de remarquer que nos résultats dépendent de ce fait qu'un point ne peut être gardé s'il n'est complètement gardé avant ou complètement gardé arrière.

Ce fait, qui a évidemment lieu dans les conditions où nous nous plaçons, ne subsisterait plus si la route des mobiles B était assujettie à être rectiligne avec vitesse constante : et c'est ce qui complique notablement, dans ce dernier cas, la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait garde complète.

Notons qu'une proposition qu'on est conduit à

(1) Le même fait est d'ailleurs aisément vérifiable sur une figure.

énoncer dans le cas des routes rectilignes, savoir : « Tout point du barrage qui est gardé contre des mobiles B arrivant perpendiculairement est, par cela même, gardé contre toute autre route suivie par les B », n'est pas exacte à notre point de vue. On s'assure sans difficulté que l'*ombre* portée sur le plan du tableau par un cylindre C_1 , lorsque les rayons lumineux sont supposés tous parallèles à une direction de pente $\frac{1}{b}$ dont la projection horizontale est perpendiculaire au plan du tableau, *déborde* l'ombre construite comme il a été expliqué plus haut.

Il existe, par conséquent, des points du barrage qui sont gardés contre les routes perpendiculaires et ne le sont point contre d'autres routes. Un mobile B peut passer en ces points sans être vu par A_1 , et cela, d'après ce qui précède, même en suivant une route rectiligne avant et après la ligne de barrage, pourvu qu'il puisse changer de direction en traversant cette ligne.

9. Nous examinerons, en second lieu, le cas du *barrage oscillant en bloc*.

On considère, cette fois, un certain nombre de mobiles A situés à une distance constante D les uns des autres et oscillant solidairement de manière que D reste invariable.

Dans notre mode de représentation, chacun de ces mobiles donnera une série de cylindres disposés comme ceux de la figure 1, les différentes séries correspondant aux différents mobiles se déduisant les unes des autres par des translations successives de longueur D parallèles à la ligne de barrage.

Nous nous placerons, pour simplifier, dans l'hypothèse où la longueur de cette ligne et, par conséquent, le nombre des mobiles sont infinis.

La question est de savoir quelles relations doivent exister entre D , d , V , K pour que toute la ligne soit gardée.

Or il en sera évidemment ainsi si l'ensemble des hexagones (*fig. 4, 5, 5 bis*) qui représentent les sections des solides d'ombres (tant avant qu'arrière) par le plan du tableau recouvre ce plan en entier, puisque tout point M de l'espace sera gardé au moins par un des cylindres.

Or l'ensemble de ces hexagones pour un seul mobile est celui qui est représenté figure 5 ou 5 *bis*. Sa plus petite largeur horizontale est $G'H'$ (*fig. 5*) ou $G'L'$ (*fig. 5 bis*).

Si donc la translation D , par laquelle on passe de cette série d'hexagones à celle qui est relative au mobile suivant, est inférieure à $G'H'$ ou à $G'L'$, la condition mentionnée tout à l'heure sera vérifiée.

Donc, *la garde sera certainement complète si l'on a*

$$(2) \quad D < V(1 + K),$$

dans le cas des oscillations longues, et si l'on a

$$(II) \quad D < 2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right),$$

dans le cas des oscillations courtes.

10. La question de savoir si cette condition suffisante est également nécessaire est plus délicate.

Remarquons d'abord que tous les cylindres que nous avons à considérer sont tangents aux mêmes plans Π , Π' , parallèles au plan du tableau à la distance V de ce plan.

Si, dès lors, nous considérons les séries de cylindres engendrés par deux mobiles barreaux consécutifs A_1 , A_2 ,

ces deux séries de cylindres, joints aux plans Π , Π' , enferment une région R de l'espace, limitée sauf dans le sens vertical et dont il est impossible de sortir par un chemin fini (à moins qu'on ne fasse intervenir des valeurs de t inférieures à celle pour laquelle le barrage a commencé à fonctionner, éventualité que nous excluons) sans rencontrer les cylindres en question ou les plans Π , Π' .

Il en résulte que, dans la garde d'un point M de l'espace intérieur à la région R , on peut faire abstraction des mobiles barreaux autres que A_1 et A_2 . Il est, en effet, impossible qu'une route, issue du point M et ne rencontrant pas les cylindres engendrés par A_1 et A_2 , rencontre un cylindre engendré par un des mobiles précédents ou suivants, sans avoir, au préalable, traversé le plan Π ou le plan Π' . Or, arrivé en un point N d'un de ces plans, le mobile B est hors de l'action du barrage, de sorte que si la route MN satisfait aux conditions requises en ce qui regarde la pente, le point M est certainement non gardé.

11. Cette remarque faite, envisageons la première oscillation des mobiles barreaux A_1 , A_2 : supposons qu'elle ait lieu dans le sens $A_2 A_1$, et qu'elle dure depuis l'instant $t = T$ jusqu'à l'instant $t = T' = T + \tau$. Soient C_1 , C_2 les cylindres représentatifs de cette première oscillation pour nos deux mobiles.

Un point de R correspondant à une valeur de t au plus égale à T' n'est évidemment gardé avant que s'il est dans l'ombre avant du cylindre C_1 .

Pour passer aux autres points de R , nous utiliserons les remarques du n° 4 bis.

Cherchons d'abord à reconnaître s'il y a garde (avant) ou non pour un point de la région R situé entre les

deux plans $t = T'$ et $t = T'' = T' + \tau = T + 2\tau$ qui marquent les limites de la seconde oscillation.

Soit M un tel point, et soient C'_1, C'_2 les cylindres, respectivement symétriques de C_1, C_2 par rapport au plan $t = T'$.

M sera certainement gardé avant s'il est dans l'ombre avant de C'_2 .

Soit, d'autre part, γ_M le cercle suivant lequel le plan $t = T'$ coupe le cône Γ_M , et qui comprend, par conséquent, tous les points de ce plan qui peuvent être joints à M par une route de pente au plus égale à $\frac{1}{b}$.

M sera également gardé avant si ce cercle γ_M est tout entier compris dans la figure F formée par l'ombre avant portée par C_1 sur le plan $t = T'$, jointe au cercle de base $\mathcal{C}'_2$ commun à C_2 et à C'_2 .

Il suffira, d'ailleurs, pour cela, que la figure en question comprenne toute la *circonférence* ⁽¹⁾ de γ_M .

Je vais montrer que, inversement, M n'est pas gardé avant si l'une ou l'autre des deux conditions précédentes n'est pas réalisée.

Si, en effet, M n'est pas dans l'ombre avant de C'_2 , le cône Γ_M a au moins une génératrice MN dont le segment inférieur (celui qui correspond aux valeurs de t plus petites que celle du point M) est sans point commun avec C'_2 . Le point N où cette génératrice rencontre le plan $t = T'$ est certainement extérieur au cercle $\mathcal{C}'_2$. S'il est également extérieur à l'ombre avant de C_1 , il n'est pas gardé avant, et il en est de même de M .

Dans le cas contraire, déplaçons continûment le

(1) En effet, la partie du plan $t = T'$ qui est extérieure à F est d'un seul tenant. Si elle comprenait un point intérieur à γ_M , on pourrait, de ce point jusqu'à l'infini, mener dans le plan T' un chemin continu sans point commun avec F , lequel couperait nécessairement la circonférence de γ_M .

point N sur γ_M à partir de sa position primitive, et cela successivement dans les deux sens, en entraînant, chaque fois, dans son mouvement, la génératrice MN correspondante.

Les seuls cas qui pourront se présenter seront les suivants :

1° Avant que la génératrice MN ne rencontre $\mathcal{C}'_2$, le point N sort de la figure F. Nous sommes alors ramenés au cas que nous venons d'envisager, et M n'est pas gardé avant.

2° Le point N, n'ayant pas cessé d'être intérieur à l'ombre avant de C_1 , vient en un point N' de la circonférence $\mathcal{C}'_2$. Si cette circonstance se présente quel que soit le sens dans lequel nous ferons cheminer N à partir de sa position primitive, les deux points N', N'' où la circonférence γ_M rencontre $\mathcal{C}'_2$ divisent cette circonférence en deux arcs dont l'un, celui qui contient le point primitif N, est entièrement intérieur à l'ombre avant de C_1 . Comme l'autre est intérieur à $\mathcal{C}'_2$, nous sommes ramenés au cas précédemment traité où tout le cercle γ_M fait partie de la figure F.

3° La génératrice MN, dans l'un ou dans l'autre des deux déplacements continus qu'on lui fait subir, vient à être tangente (en un point ν) à la surface latérale de C'_2 . Le point ν est certainement sur une *bande latérale* de C'_2 (voir n° 4 bis) et comme la cote de N est inférieure à celle de ν , il en résulte (encore d'après le n° 4 bis) que le point N est plus éloigné du plan du tableau que ν . Donc il ne saurait appartenir à l'ombre avant de C_1 , dont tous les points (de cote T' et non intérieurs au cercle de base commun à C_1 et à C_2) ont un éloignement plus petit que celui des bandes latérales.

Comme N est extérieur à $\mathcal{C}'_2$, il n'est pas gardé non

plus que M. On voit d'ailleurs que ce cas rentre dans le cas 1°.

Notre conclusion est donc bien démontrée (1). Par conséquent, dans la région $R^{(1)}$ comprise entre C'_1 , C'_2 et les plans horizontaux $t = T'$, $t = T''$, les points gardés sont :

- 1° Ceux de l'ombre avant de C'_2 ;
- 2° Ceux qui sont tels que le cercle γ_M correspondant soit entièrement intérieur à la figure F : l'ensemble de ces points n'est autre chose que l'ombre avant de F.

Envisageons maintenant le plan $t = T''$. Sur ce plan, l'ombre avant de F découpe une figure f ; et, d'autre part, l'ombre avant de C'_2 , jointe au cercle de base $\mathfrak{S}'_1$ commun à C'_1 et à C'_2 , détermine sur le même plan une figure F' analogue à F.

Pour les mêmes raisons que tout à l'heure, dans la portion $R^{(2)}$ de R comprise entre le plan $t = T''$ et le plan $t = T''' = T'' + \tau$, les points gardés avant seront :

- 1° Ceux de l'ombre avant de la figure $F' + f$;
- 2° Ceux de l'ombre avant du cylindre C'_1 , consécutif à C'_1 .

Or, une fois que nous aurons appris à construire l'ombre avant de F et, par conséquent, f , qui est la section de cette ombre par le plan $t = T''$, nous verrons que cette figure f est entièrement intérieure à F' .

Donc, les points gardés de $R^{(2)}$ sont ceux de l'ombre de F' et ceux de l'ombre de C'_1 , c'est-à-dire qu'ils

(1) En opérant d'une manière un peu différente, on peut arriver à n'utiliser que ce fait que les arcs latéraux de $\mathfrak{S}_2$ (c'est-à-dire les parties des bandes latérales situées dans le plan $t = T'$) ne sont pas gardés.

s'obtiennent exactement par les constructions correspondantes à celles qui donnaient les points gardés de $R^{(1)}$.

Dès lors, il est clair qu'il en sera de même pour toutes les portions suivantes de R , de sorte que nous connaîtrons les points gardés avant dans tout l'espace.

12. Nous avons donc à déterminer les figures F , F' et leurs ombres.

La section Ω du plan $t = T'$ par l'ombre avant de C_1 comprend :

Dans le cas des oscillations *longues*, le cercle de base $\mathcal{C}_1$ de C_1 situé dans le plan $t = T'$ et la portion de ce plan comprise entre $\mathcal{C}_1$ et deux tangentes à ce cercle (traces des plans tangents au cylindre C_1) prolongées jusqu'à leur point d'intersection (fig. 6), ce

Fig. 6.

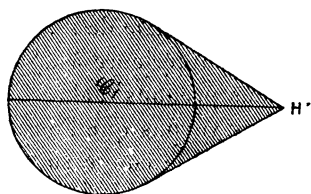
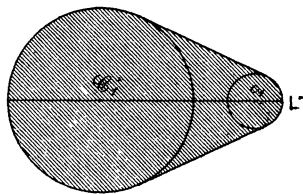


Fig. 6 bis.



point d'intersection étant celui que nous avons appelé précédemment H' ;

Dans le cas des oscillations *courtes*, le cercle $\mathcal{C}_1$ et la portion de plan comprise entre ce cercle, les tangentes construites comme dans le premier cas et un cercle $(^1) c_1$ dont le centre est la projection, sur le plan $t = T'$, de celui de $\mathcal{C}_1$, l'aire du cercle c_1 étant

(¹) c_1 est l'ombre, sur le plan $t = T'$, du cercle $\mathcal{C}_1$, cercle de base de C_1 situé dans le plan initial $t = T$.

comprise et les tangentes étant limitées à leurs points de contact avec c_1 (*fig. 6 bis*).

Si

$$D > V(1 + K),$$

pour les oscillations longues; si

$$D > 2V + d\left(1 - \frac{1}{K}\right),$$

pour les oscillations courtes, c'est-à-dire *si l'on n'est pas dans le cas déjà traité au n° 9*, cette section Ω sera sans point commun avec $\mathcal{C}'_2$.

Dans ces conditions, il est clair ⁽¹⁾ que l'ombre avant de F n'est autre que celle de Ω , plus celle de $\mathcal{C}'_2$.

Il est clair d'ailleurs que (dans la région $t \geq T'$) l'ombre de Ω coïncide avec celle de C_1 lui-même.

Coupons maintenant l'ombre ainsi obtenue par le plan $t = T''$, de manière à obtenir la figure f .

L'ombre de $\mathcal{C}'_2$ fait, par définition, partie de F' .

Quant à l'ombre de Ω , elle est intérieure à $\mathcal{C}'_1$ ou extérieure à R . Si, en effet, nous prenons d'abord le cas des oscillations courtes, nous voyons que l'ombre de c_1 , si elle coupe le plan $t = T''$, le coupe suivant un cercle concentrique à $\mathcal{C}'_1$, mais de rayon plus petit, et par rapport auquel tout le reste de l'ombre de Ω est du côté opposé à R .

La conclusion est la même *a fortiori* dans le cas où l'ombre de c_1 ne coupe pas notre plan, ou dans le cas des oscillations longues.

L'assertion énoncée au n° 11 est donc établie.

(1) Il en serait autrement dans le cas où Ω et $\mathcal{C}'_2$ se couperaient (cas du n° 9). L'ombre de F serait alors plus étendue que celle de Ω , plus celle de $\mathcal{C}'_2$. La détermination de cette ombre, que le résultat du n° 9 rend inutile, serait d'ailleurs aisée.

La détermination des points gardés avant se fera donc dans toutes les parties successives de R ($R^{(1)}$ exceptée) comme dans $R^{(2)}$.

Mais comme, de plus, les points gardés avant de $R^{(2)}$ sont situés soit dans l'ombre de C_1 (puisqu'elle coïncide avec celle de Ω) soit dans celle de C'_2 , nous trouvons qu'ici encore (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est-à-dire si les inégalités du n° 9 ne sont pas vérifiées) *un point de l'espace est gardé par un seul cylindre* (et même par un des quatre cylindres immédiatement voisins) *ou n'est pas gardé du tout*.

Le premier cas, ainsi que nous le savons, ne se présente pas pour tous les points du plan du tableau du moment qu'on n'a pas les inégalités du n° 9.

Donc *l'une de ces inégalités* (celle qui correspond au cas où l'on se trouve) *est nécessaire et suffisante pour que le barrage soit gardé*.

Si (V et K étant encore considérés comme constants) on prend d comme abscisse, la ligne qui a comme ordonnée correspondante la valeur maxima de D est une ligne brisée dont le premier segment va du point $(0, 2V)$ au point $[(VK, V(1 + K))]$, tandis que le second est horizontal et s'étend indéfiniment.

On voit que, à partir de la valeur $l = VK$, D est indépendant de d .

13. Le cas du *barrage oscillant à contre-bord* ⁽¹⁾

(1) Dans ce type de barrage oscillant, chaque mobile oscille encore uniformément dans un intervalle fixe (oscillations représentées par les cylindres de la figure 1). Mais deux mobiles consécutifs se meuvent constamment en sens contraire, et, par conséquent, se rapprochent et s'écartent l'un de l'autre alternativement. Les cylindres représentatifs des oscillations d'un des mobiles étant construits, ceux qui correspondent au mobile suivant sont symétriques des

est plus simple, à un certain point de vue, que le précédent.

Il peut arriver, dans ce cas, que les cylindres relatifs à deux mobiles A consécutifs se coupent, ou, en langage ordinaire, que, à certains instants du mouvement, les cercles de vision se coupent. On n'a même à s'occuper que de l'hypothèse où il en est ainsi; car si deux cercles de vision consécutifs restent extérieurs même au moment du plus grand rapprochement des mobiles correspondants, ils laissent entre eux un intervalle, lequel est évidemment non gardé.

Il peut même arriver que les mobiles barreaux eux-mêmes se croisent : supposons qu'il en soit ainsi.

Dans ce cas, quatre cylindres voisins (deux relatifs à un mobile et deux au suivant) délimitent (avec les plan Π et Π') une portion de l'espace complètement fermée en tous sens.

Il en résulte, d'après une remarque déjà faite, que les points de cette portion d'espace, s'ils sont gardés, le sont par l'ensemble de ces quatre cylindres : on les trouvera tous en prenant l'ombre avant de l'ensemble des deux cylindres inférieurs et l'ombre arrière de l'ensemble des deux cylindres supérieurs.

La même remarque s'applique à un cas voisin, celui du barrage en *ligne de file par contre-marche*, lequel est d'ailleurs théoriquement compris dans le précédent.

L'ombre avant d'un système de deux cylindres circulaires symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan a sa frontière empruntée d'une part à celle de l'ombre de chaque cylindre, d'autre part à une surface

premiers par rapport à un certain plan perpendiculaire à la ligne de barrage.

(lieu des droites de pente $\frac{1}{b}$ tangentes communes aux deux cylindres), laquelle a pour trace sur le plan du tableau (et pour ligne double) une courbe du quatrième degré facile à construire (1).

La discussion des cotes maxima et minima de cette courbe suffira donc à donner ici les conditions de validité du barrage (2).