

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 330-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__330_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2100.

(1908, p. 478.)

Si a et b sont les racines de l'équation

$$x^2 - 7x + 7^3 = 0,$$

les deux quantités

$$\begin{aligned} & -2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) + (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}), \\ & -(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) - (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}) \end{aligned}$$

sont égales à celles-ci :

$$3(\varepsilon \sqrt[3]{a} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{b}), \quad 3(\varepsilon^2 \sqrt[3]{a} + \varepsilon \sqrt[3]{b}),$$

ε et ε^2 étant les racines cubiques imaginaires de l'unité.
Préciser ε .

G. F.

(D'après HERMITE, *Cours d'Analyse*
de l'Ecole Polytechnique.)

SOLUTION,

Par L'AUTEUR.

Les quantités a et b sont des imaginaires conjuguées; $\sqrt[3]{a}$ désigne l'une quelconque des racines cubiques de a , et l'on doit supposer que $\sqrt[3]{b}$ désigne l'imaginaire conjuguée de celle que représente $\sqrt[3]{a}$. En outre, on doit remplacer $\sqrt[3]{a^2}$ et $\sqrt[3]{b^2}$ par $(\sqrt[3]{a})^2$ et $(\sqrt[3]{b})^2$, quantités bien définies par ce qui précède.

Cela posé, désignons les deux quantités considérées par α et β . Il suffit de montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha - 2\beta$ ont bien les valeurs qui résultent des indications de l'énoncé, ε étant choisi convenablement. On doit avoir d'abord

$$-(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = (\varepsilon + \varepsilon^2)(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}),$$

ce qui est exact.

On doit avoir ensuite

$$(\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{b})^2 = (\varepsilon - 2\varepsilon^2)\sqrt[3]{a} + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)\sqrt[3]{b}$$

ou, en prenant

$$\varepsilon = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{b})^2 = \sqrt[3]{a} \left(\frac{1 - 3i\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt[3]{b} \left(\frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2} \right);$$

avec la valeur choisie par ε , on doit prendre

$$\frac{a}{7} = \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{b}{7} = \frac{1 - 3i\sqrt{3}}{2},$$

et la relation à vérifier devient

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{a})^2 + (\sqrt[3]{b})^2 &= \sqrt[3]{a} \frac{b}{7} + \sqrt[3]{b} \frac{a}{7} \\ &= \frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}}{7} [(\sqrt[3]{b})^2 + (\sqrt[3]{a})^2] \end{aligned}$$

ou

$$\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} = 7;$$

or le produit ab est égal à 7^3 , et l'on a supposé que $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ désignent deux imaginaires conjuguées; donc...

2115.

(1909, p. 56.)

Si l'on définit un tétraèdre $SABC$ en donnant les faces λ, μ, ν du trièdre S et les longueurs α, β, γ des arêtes issues de S , le tétraèdre est orthocentrique sous les deux conditions

$$\frac{\alpha}{\cos \lambda} = \frac{\beta}{\cos \mu} = \frac{\gamma}{\cos \nu}.$$

Cela étant, dans un tétraèdre orthocentrique $ABCD$ dont H est l'orthocentre, on donne les valeurs algébriques $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des segments $\overline{HA}, \overline{HB}, \overline{HC}, \overline{HD}$, le sens positif sur chaque hauteur allant de la base vers le sommet : déterminer la valeur commune des rapports égaux

$$\frac{\cos(b, c)}{\delta \alpha} = \frac{\cos(c, a)}{\delta \beta} = \frac{\cos(a, b)}{\delta \gamma} = \frac{\cos(d, a)}{\beta \gamma} = \dots$$

NOUVELLE SOLUTION,

Par un ANONYME.

La solution donnée à la page 138 est incomplète, car les seules données du problème sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il faut lire d'ailleurs $-\rho^2$ au lieu de ρ^2 , $-\mu^2$ au lieu de μ^2 , $-(H)$ au lieu de (H) dans les deux dernières formules.

Pour la première partie, AI étant hauteur du triangle ABC et P étant l'orthocentre de ce triangle, de sorte que SP est hauteur du tétraèdre orthocentrique $SABC$, on a, en traçant SI ,

$$\cos \lambda = \cos(\widehat{ISB} - \widehat{ISC}) = \frac{\overline{IS}^2}{\beta \gamma} + \frac{\overline{IB} \cdot \overline{IC}}{\beta \gamma},$$

$$\beta \gamma \cos \lambda = \overline{PS}^2 + \overline{IP}^2 - \overline{IA} \cdot \overline{IP} = \overline{PS}^2 + \overline{IP} \cdot \overline{AP},$$

d'où

$$\beta\gamma \cos \lambda = \gamma\alpha \cos \mu = \alpha\beta \cos \nu = \overline{PS}^2 + \overline{PI} \cdot \overline{PA}.$$

Pour la seconde partie, l'application de la formule précédente au tétraèdre HABC donne

$$-\beta\gamma \cos(b, c) = \overline{PH}^2 - \overline{PH} \cdot \overline{PD} = \overline{PH} \cdot \overline{DH}$$

ou

$$\beta\gamma \cos(b, c) = -\overline{HP} \cdot \overline{HD} = -k.$$

L'équation qui donne k se déduit de la relation entre les cosinus des six dièdres d'un tétraèdre; cette équation est

$$\begin{vmatrix} \frac{-\alpha^2}{k} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-\beta^2}{k} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-\gamma^2}{k} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{-\delta^2}{k} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle a été donnée sous forme simple dans les *Nouvelles Annales* (1909, p. 557), et l'on a montré qu'elle a une racine négative acceptable et trois racines positives dont la plus petite est seule acceptable.

2129.

(1909, p. 192.)

Un point P décrit une normale à une parabole : de ce point on peut mener deux autres normales à la parabole. Démontrer que la droite qui joint les centres de courbure situés sur ces deux normales enveloppe une parabole quand le point P décrit la normale donnée.

(Georges CUNY.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Soient m le coefficient angulaire de la normale fixe décrite par le point P; μ_1 et μ_2 les coefficients angulaires de deux

normales variables issues de ce point, on a

$$m + \mu_1 + \mu_2 = 0.$$

D'autre part, les équations paramétriques de la développée sont, l'origine étant placée au sommet de cette courbe,

$$x = \frac{3p\lambda^2}{2},$$

$$y = p\lambda^3,$$

λ étant le coefficient angulaire d'une normale variable à la parabole.

Soit

$$ux + vy + w = 0$$

une droite quelconque, l'équation aux λ des points d'intersection de cette droite et de la développée est

$$p\lambda^3 v + \frac{3p\lambda^2}{2} u + w = 0;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée s'obtiendra en écrivant que la somme de deux des racines de cette équation est constante et égale à $-m$, ou encore que l'une des racines est égale à

$$m - \frac{3u}{2v},$$

ce qui donne

$$mp(2mv - 3u)^2 + 4vw = 0,$$

équation tangentielle d'une parabole.

Autres solutions par MM. BARISIEN, GIRAUDON, LEZ.
