

Certificat de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 317-330

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__317_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Exposer une méthode de recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Application à l'équation

$$p^2y - z = 0.$$

II. On considère les surfaces développables dont les génératrices font un angle donné α avec l'axe des z et qui passent par la parabole

$$y^2 - 2px = 0, \quad z = 0$$

(en coordonnées rectangulaires).

Montrer que ces surfaces sont des cylindres à l'exception d'une certaine surface développable S (composée de deux nappes distinctes se croisant suivant la parabole).

Faire voir que S est l'enveloppe des cylindres et rechercher géométriquement les projections sur le plan des xy des lignes de courbure de S .

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère le volume compris entre les deux plans $z = 0$, $z = 6$ et la surface ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{z(6-z)}}.$$

Ce volume a une mesure finie (dire pourquoi).

On demande de déterminer un plan P parallèle au plan des xy et tel que le rapport de la portion du volume précédant comprise entre le plan P et le plan $z = 6$ à celle comprise entre le plan P et le plan $z = 0$ soit égale à 0,3656.

(Novembre 1909.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Équations différentielles du premier ordre non résolues par rapport à la dérivée. Cas particuliers : x ou y ne figurent pas dans l'équation. Équations de Lagrange et de Clairaut.

II. Déterminer les surfaces telles que, si de l'origine on abaisse la perpendiculaire OP sur le plan tangent en M ,

le produit de OP par la portion MN de normale comprise entre le point M et le plan xOy soit égal au carré de la distance OM.

Étudier les sections de ces surfaces par les plans passant par Oz et déterminer les fonctions arbitraires de façon que ces sections forment une famille de lignes de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Décomposer en éléments simples

$$\frac{x^2 + px + q}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Déterminer p et q de façon que la fonction primitive de cette fraction rationnelle soit algébrique.

Calculer

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{(x-1)^3(x+2)^2} dx.$$

(Juillet 1909.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface réglée.

Former, en général, l'équation différentielle à laquelle elles satisfont.

Former, en particulier, cette équation dans le cas d'une hyperboloïde à une nappe.

Intégrer quand l'hyperboloïde est de révolution.

SOLUTION.

En représentant l'hyperboloïde par les équations paramétriques

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \sin t + \cos t,$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \cos t + \sin t,$$

on trouve, pour l'équation différentielle demandée,

$$\frac{dz}{dt} + \frac{(a^2 - b^2) \sin t \cos t}{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2 + c^2} z - \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2}{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2 + c^2} c = 0,$$

qu'il est facile d'étudier.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donné le contour mixte formé par l'axe des x et une demi-circonférence ayant pour centre l'origine, pour rayon une longueur supérieure à l'unité, et située dans la partie des y positifs du plan des z , intégrer le long de ce contour parcouru dans le sens positif la différentielle*

$$\frac{z^2 dz}{z^4 + z^2 + 1}.$$

Déterminer la limite de la partie de l'intégrale qui correspond à la demi-circonférence lorsque le rayon de celle-ci augmente indéfiniment.

Enfin, calculer, à 0,001 près, la valeur numérique de l'intégrale définie réelle

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + x^2 + 1}.$$

SOLUTION.

$$\frac{1}{6} \pi \sqrt{3} = 0,906.$$

(Juin 1909.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface étant rapportée à trois axes rectangulaires, Ox , Oy , Oz , soient M un point de la surface, P le point où le plan tangent en M coupe Oz , L la trace de la droite MP sur le plan xOy .*

1^{re} *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles*

des surfaces S telles que le point Q ait une abscisse donnée a . Démontrer que les surfaces S sont des surfaces réglées.

2° Soit Σ celle de ces surfaces qui contient le cercle

$$z = a, \quad x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Déterminer les projections sur le plan xOy des lignes asymptotiques de la surface Σ . Indiquer la forme de ces projections.

3° Soit Σ_1 celle des surfaces S qui contient la droite

$$x = \frac{a}{2}, \quad y + z = 0.$$

La surface Σ_1 est du second degré, et l'un de ses systèmes de génératrices rectilignes est formé de droites rencontrant Oz : on considère les trajectoires orthogonales des génératrices de ce système et l'on demande l'équation générale de la projection de ces trajectoires sur le plan xOy .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} + y^2 \right) = a(xy - 1),$$

Cas particulier où $a = 1$.

(Juillet 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soit M un point d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires $Oxyz$.

1° Trouver et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que l'angle formé par la droite OM et par la normale en M à la surface se projette sur le plan xOy suivant un angle droit;

2° Déterminer les lignes asymptotiques des surfaces S ;

3° Soient A une aire quelconque prise sur la surface S , V le volume limité par A , par sa projection sur le plan xOy , et par le cylindre projetant (on suppose ce volume ou entier d'un même côté du plan xOy). Soit V' le volume

(322)

limité par A et par le cône ayant pour sommet l'origine et pour base l'aire A. Démontrer que l'on a

$$V = 3 V';$$

4° Déterminer celle des surfaces S qui contient la courbe

$$x = a, \quad y = ae^{\frac{z}{a}}$$

et calculer le volume V, en supposant que A soit l'aire de cette surface qui se projette sur le plan xOy à l'intérieur du triangle limité par les droites

$$x = 0, \quad y = a, \quad y = x.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de l'espace. On suppose que x, y, z soient des fonctions d'une variable t définies par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = z - x, \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Déterminer ces trois fonctions de façon que, pour $t = 0$, elles se réduisent à $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$; α, β, γ étant trois constantes données.

Démontrer que la courbe décrite par M, lorsque t varie, est une courbe plane et que, lorsque α, β, γ varient, le plan de cette courbe passe par une droite fixe.

(Novembre 1909.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Développement en série de Taylor d'une fonction analytique d'une variable complexe.

II. Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz , on considère toutes les sphères tangentes au plan des xz aux différents points de Oz .

1° Montrer que ces sphères satisfont toutes à une même

équation aux dérivées partielles du premier ordre (E) et former cette équation;

2° Indiquer la génération de la surface intégrale la plus générale de l'équation (E), ainsi que les caractéristiques de cette équation;

3° Déterminer la surface intégrale de (E) qui passe par la courbe

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 - 2y = 0;$$

4° Démontrer que la section par un plan quelconque passant par Oz de toute surface intégrale de (E) est une ligne de courbure de cette surface. Quelles sont les autres lignes de courbure? (Juin 1909.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction des deux variables complexes x et y , holomorphe au voisinage du système de valeurs (x_0, y_0) . Énoncer et démontrer le théorème relatif à l'existence des intégrales y qui prennent la valeur y_0 pour $x = x_0$.

II. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial x}{\partial z} - x \frac{\partial y}{\partial z} - a = 0,$$

a désignant une constante donnée.

1° Intégrer cette équation;

2° La surface intégrale étant supposée rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires, déterminer la fonction arbitraire qui entre dans son équation de manière que cette surface admette pour ligne de courbure sa section par le plan des yz .

Déterminer dans ce cas les deux familles de lignes de courbure, ainsi que les deux rayons de courbure principaux.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

soit par la méthode de Laplace, soit en se servant de la propriété de l'équation (propriété qu'on démontrera) d'entraîner comme conséquence une certaine équation différentielle linéaire du sixième ordre à coefficients constants.

(Octobre 1909.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On considère la surface (S) enveloppe des sphères (Σ) données par l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0,$$

dans laquelle α , β , γ sont des fonctions données d'un paramètre.

Démontrer que toutes les normales de (S) rencontrent une courbe (C), que la surface (S) admet une famille de circonférences (Γ) pour l'un des systèmes de ses lignes de courbure et que les plans tangents à (S) le long d'une quelconque des circonférences (Γ) enveloppent un cône de révolution (R).

2° *Quelles doivent être les fonctions α , β , γ pour que toutes les circonférences (Γ) soient égales? Que sont alors les cônes (R)? Montrer que les normales de (S) sont aussi des normales de (C) et en déduire le second système de lignes de courbure de cette surface (S).*

3° *Quelles doivent être les fonctions α , β , γ pour que tous les cônes (R) soient égaux? Montrer que la recherche du second système de lignes de courbure de (R) revient alors à la recherche de familles de droites coupant (C) sous un angle constant et ayant une enveloppe.*

On donne la fonction $f(z)$ définie par l'expression

$$f(z) = \int_0^z \left(\int_0^{\xi} \frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{(1+x)^2} \right) d\xi,$$

dans laquelle :

a. l'intégrale $\int_0^z$ est prise suivant un chemin donné (Γ) de sorte que ξ est un point variable sur (Γ);

b. l'intégrale $\int_0^\xi$ est prise suivant la portion (0, ξ) de Γ .

Quand (Γ) varie, quelles sont les différentes valeurs de $f(z)$? En quoi le résultat serait-il modifié si l'on abandonnait l'hypothèse b?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p^2 + q^2 = z^2.$$

Développer la fonction $\zeta_2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$ en série de Fourier procédant suivant les sinus et cosinus des multiples entiers de φ .
(Juillet 1909.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + Ay' + By = 0 :$$

1° Vérifier que la transformée de cette équation, définie par la relation

$$\frac{y'}{y} = z,$$

est l'équation de Riccati

$$z' + z^2 + Az + B = 0;$$

2° Soient y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation (1), on pose

$$u = \frac{y_2}{y_1} \quad \text{et} \quad v = \frac{u''}{u};$$

montrer qu'on a

$$v = -A - \frac{2y'_1}{y_1}$$

et que v est déterminée par une équation de Riccati ;

3° A quelles conditions doivent satisfaire les fonctions A et B pour que l'équation (1) admette deux intégrales dont le rapport soit égal à l'une des expressions suivantes :

$$(\alpha) \quad u = ax + b,$$

$$(\beta) \quad u = \operatorname{tang}(ax),$$

$$(\gamma) \quad u = \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} ax},$$

$$(\delta) \quad u = \operatorname{Log} x;$$

montrer que, si l'une de ces conditions est remplie, l'intégration de l'équation (1) dépend d'une seule quadrature.

Achever les calculs en supposant :

A constant pour les conditions (α) , (β) , (γ) ;

$A = \frac{2m}{x}$ ($2m$ const.) pour la condition (δ) .

II. Soit S la surface dont l'équation en coordonnées cartésiennes rectangulaires est

$$z = x^2 y.$$

1° Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.
2° Soit L l'intersection de la surface S avec le plan tangent en un point quelconque M de S , de coordonnées a , b , c . Calculer la courbure de L en un point quelconque de L , en fonction de l'ordonnée y de ce point.

3° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface S et déterminer les cosinus directeurs des directions principales de S en un point quelconque de Ox .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° On considère la surface (Σ) qui, définie en coordonnées semi-polaires, a pour équation

$$z = r - a \cos \theta,$$

a désignant une constante positive, puis le solide (S) limité

par la surface (Σ), les plans $z = 0$, $z = a$, avec la condition

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Calculer pour le solide (S) :

(α) L'aire de la section par un plan $z = \text{const.}$,

(β) Le volume,

(γ) Les coordonnées du centre de gravité.

2° Montrer que si l'on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \text{arc tang } \frac{y}{x},$$

la fonction

$$z = r - a \cos \theta$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

(Juillet 1909)

Toulouse.

EPREUVE THÉORIQUE. — Deux surfaces (S) et (S_0) se correspondent point par point de façon que les normales aux points correspondants (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) soient parallèles et qu'on ait, entre les différentielles des coordonnées, les relations

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2, \\ dx \, dx_0 + dy \, dy_0 + dz \, dz_0 &= 0. \end{aligned}$$

1° Montrer que z regardé comme fonction de x et y vérifie une seule équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on formera et dont on indiquera la signification géométrique.

2° Chercher si la surface (S) peut être de révolution; trouver sa méridienne. Déterminer la surface (S_0) correspondante, en indiquant un mode de génération.

3° Montrer que les lignes de courbure de (S) corres-

pondent aux lignes asymptotiques de (S_0) et réciproquement; trouver ces lignes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Transformer l'intégrale*

$$J_m = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^m}{(a-x)^{m+1}} dx$$

en prenant pour nouvelle variable

$$y = \frac{1}{2} \frac{1-x^2}{a-x};$$

montrer sur la nouvelle forme qu'il existe une relation linéaire entre J_m, J_{m-1}, J_{m-2} .

Calculer explicitement J_3 .

(Juillet 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Une courbe de forme invariable située dans un plan passant par Oz tourne autour de cet axe en même temps qu'elle glisse parallèlement à l'axe suivant une loi quelconque; on demande :*

1° *De déterminer sous quelle condition les lignes planes $x = \text{const.}$ sont des lignes asymptotiques de la surface engendrée. Quelles sont alors les autres lignes asymptotiques?*

2° *De former dans le cas général en coordonnées rectangulaires (x, y) l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des sections de la surface par les plans $z = \text{const.}$ Trouver dans quel cas cette équation est homogène et l'intégrer.*

II. *On considère le système d'équations linéaires*

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + cz,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z,$$

$$\frac{dz}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z,$$

où les coefficients $a_1, \dots, c_2$ sont des fonctions de t .

1° Trouver à quelles conditions toute solution (x, y, z) du système vérifie une relation

$$x^2 - y^2 + z^2 = \text{const.}$$

2° Montrer que si l'on suppose

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

la fonction $\lambda = \frac{x+y}{1-z}$ vérifie une équation de Riccati.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\alpha \, d\alpha}{1 - 2x \cos(\alpha - \beta) + x^2},$$

où l'on suppose x réel et inférieur à l'unité, β désignant une constante arbitraire.

NOTA. — On formera d'abord le développement de $\frac{1}{1 - 2x \cos(\alpha - \beta) + x^2}$ en série procédant suivant les puissances croissantes de x . (Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère les sphères tangentes au plan des xy qui ont leurs centres $m(x, y, z)$ sur une surface donnée s : elles enveloppent une surface S , lieu d'un point $M(X, Y, Z)$.

1° Calculer les cosinus directeurs de la normale au point M à la surface S , au moyen de x, y, z, p, q .

2° Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$X(x, y, z, p, q) = \text{const.}$$

où le premier membre désigne la coordonnée X du point M . (Intégrale complète, intégrale générale.)

3° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface qui représente l'intégrale générale de cette équation.

II. Indiquer la suite des propositions générales sur les fonctions méromorphes doublement périodiques qui amène à la formation de la fonction $\wp$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une fonction méromorphe doublement périodique $\wp(u)$ possède dans le parallélogramme des périodes les deux pôles $u = 0$, $u = b$; on donne au voisinage de ces pôles les développements

$$\wp(u) = \frac{\alpha}{u^2} - \frac{\beta}{u} + A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots,$$

$$\wp(u) = \frac{\beta}{u-b} + B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + \dots$$

1° Exprimer, au moyen de la fonction ζ , l'intégrale indéfinie $\int \wp(u) du$.

2° Former l'équation algébrique qui lie $\wp(u)$ à sa dérivée première.

(Juillet 1909.)