

R. BRICARD

Sur les surfaces de Jamet réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 312-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__312_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O4h]

SUR LES SURFACES DE JAMET RÉGLÉES;

PAR M. R. BRICARD.

Cette Note a été écrite pour répondre à une question posée dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* par M. O. Degel (1910, p. 3, Question 3648), et qui peut s'énoncer ainsi : *Quelles sont les surfaces de Jamet qui sont en même temps réglées ?* On sait qu'on appelle *surfaces de Jamet* celles qui satisfont à la condition suivante : les courbes de contact des cylindres circonscrits qui ont leurs génératrices parallèles à un certain plan fixe sont dans des plans formant un faisceau.

M. Raffy, dont tous les géomètres déplorent la perte récente, a montré, dans une de ses dernières communications à la *Société mathématique de France*, qu'on peut résoudre le problème en utilisant l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées. Ses résultats sont en parfait accord avec ceux que m'a fournis la méthode exposée ci-dessous : en ayant égard au théorème classique de Chasles sur la loi de variation du plan tangent à une surface réglée le long d'une génératrice, on se trouve en présence d'un système extrêmement simple d'équations différentielles du premier ordre, et la question se résout avec très peu de calculs.

Soit M un point d'une surface satisfaisante (S). D'après les conditions énoncées, quand M varie dans un plan passant par une droite fixe, qu'on peut prendre

pour axe des z , la trace du plan tangent en M sur un plan fixe, qu'on peut prendre pour plan des xy , doit rester parallèle à une certaine droite.

Appelons t et T les coefficients angulaires respectifs de la trace du plan (MOz) et du plan tangent à (S) en M sur le plan des xy . Il résulte des conditions de l'énoncé qu'on a entre t et T une relation

$$(1) \quad f(t, T) = 0,$$

valable quelle que soit la position du point M sur (S) .

Il est facile de reconnaître *a priori* quelle est la forme de cette relation. A cet effet, faisons varier le point M sur une génératrice G de (S) . D'après le théorème classique de Chasles, la ponctuelle engendrée par M et le faisceau engendré par les traces des plans tangents correspondants sont homographiques. Cela revient évidemment à dire que la relation (1) est homographique.

Cela posé, écrivons les équations d'une génératrice de la surface

$$2) \quad \begin{cases} x = mz + n, \\ y = pz + q, \end{cases}$$

où les coefficients m , n , p , q sont fonctions d'une variable; pour simplifier les calculs, nous pouvons supposer que cette dernière est m ou p (ces deux coefficients ne sont en effet pas constants tous les deux, autrement on aurait affaire à un cylindre et nous écartons cette hypothèse sans intérêt). Prenons par exemple le coefficient m comme variable indépendante.

L'équation du plan tangent en M est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ z+n' & p'z+q' & 0 \\ m & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à m . On a alors, avec les notations indiquées plus haut,

$$T = \frac{p'z + q'}{z + n'}$$

ou

$$(3) \quad Tz - p'z + n'T - q' = 0,$$

et

$$t = \frac{pz + q}{mz + n}$$

ou

$$mtz - pz + nt - q = 0.$$

Par élimination de z entre les équations (3) et (4), on obtiendra entre t et T une relation. En écrivant que cette relation est homographique, on formera un système d'équations différentielles qui définira les coefficients n, p, q en fonction de m .

Le calcul se simplifie notablement si l'on prend la relation homographique sous une forme réduite. Mais il faut distinguer deux cas, suivant que la relation homographique a ses valeurs doubles distinctes ou confondues. Nous allons les examiner successivement.

1° *Les valeurs doubles sont distinctes.* — On peut alors supposer les axes Ox et Oy tellement choisis que ces valeurs doubles soient zéro et l'infini, et la relation homographique se réduit à

$$T = kt,$$

k étant une constante.

Remplaçons alors T par kt dans la relation (3), il vient

$$ktz - p'z + kn't - q' = 0,$$

et il faut écrire que cette relation est identique à la

relation (4). On obtient ainsi

$$\frac{k}{m} = \frac{p'}{p} = \frac{kn'}{n} = \frac{q'}{q}.$$

Ce système s'intègre sans aucune difficulté. On trouve d'abord

$$n = cm,$$

c étant une constante. La première des équations (2) devient alors

$$x = m(z + c),$$

et il est clair que par un déplacement convenable de l'origine, on peut annuler le coefficient c . Soit donc

$$n = 0.$$

On trouve ensuite

$$p = am^k, \quad q = bm^k,$$

a et b étant de nouvelles constantes. Les équations (2) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} x &= mz, \\ y &= m^k(az + b), \end{aligned}$$

et l'élimination de m donne l'équation de la surface (S) sous la forme

$$y = (az + b) \left(\frac{x}{z} \right)^k.$$

Comme les plans

$$y = 0, \quad az + b = 0, \quad x = 0, \quad z = 0$$

forment un véritable tétraèdre (ayant une arête rejetée à l'infini), la surface (S) fait partie de celles qui sont définies en coordonnées tétraédriques par l'équation

$$(5) \quad \frac{X}{Y} = \left(\frac{Z}{T} \right)^k.$$

On énonce immédiatement la propriété caractéris-

tique de ces surfaces : les sections par des plans contenant l'arête $X = 0$, $Z = 0$, du tétraèdre de référence sont les courbes de contact de cônes circonscrits ayant leurs sommets sur l'arête $Y = 0$, $T = 0$.

Remarquons encore que l'équation (5) ne change pas si l'on y permute X et Y , Z et T . Il en résulte que les deux arêtes $X = 0$, $Z = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ jouissent de propriétés réciproques. Le fait était à peu près évident *a priori*. Désignons en effet par D et Δ les deux arêtes en question. Nous savons déjà que les sections de la surface par des plans qui contiennent D sont les courbes de contact de cônes circonscrits ayant leurs sommets sur Δ . Il s'ensuit, d'après le théorème de Dupin, que si une tangente à (S) rencontre D , la tangente conjuguée rencontre Δ . L'énoncé de cette propriété étant symétrique par rapport à D et Δ , la réciprocité de ces deux droites est bien mise en évidence.

2° Les valeurs doubles sont confondues. — On peut supposer les axes tellement choisis que la valeur double unique soit égale à l'infini. La forme de la relation est alors

$$T - t - k = 0,$$

k étant une constante.

Les relations à identifier sont alors

$$(t + k)z - p z + n'(t + k) - q' = 0,$$

$$mtz - p z + nt - q = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{m} = \frac{p' - k}{p} = \frac{n'}{n} = \frac{q' - kn'}{q}.$$

On pourra faire, comme dans le premier cas,

$$n = 0.$$

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} p &= am + km \operatorname{Lm}, \\ q &= bm, \end{aligned}$$

a et b étant de nouvelles constantes. On a donc, pour équations de la génératrice,

$$\begin{aligned} x &= mz, \\ y &= m(a + k \operatorname{Lm})z + bm. \end{aligned}$$

Pour éliminer m , nous tirons de la seconde équation

$$\operatorname{Lm} = \frac{y - amz - bm}{kmz} = \frac{y - ax - \frac{bx}{z}}{kx},$$

d'où

$$m = \frac{x}{z} = e^{\frac{y - ax - \frac{bx}{z}}{kx}}$$

ou, en introduisant de nouvelles constantes,

$$x = Az e^{\frac{cy}{x} + \frac{d}{z}}.$$