

V. JAMET

Sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10 (1910), p. 309-311

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__309_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O4h]

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. V. JAMET.

Voici une nouvelle solution du problème résolu par M. Villat, dans le numéro de mars : *Exprimer les coordonnées d'un point, mobile sur une surface réglée, en fonction des paramètres de ses lignes asymptotiques.*

Soit S une telle ligne asymptotique. Par chacun de ses points passe une génératrice, contenue dans le plan osculateur de S; et l'on peut supposer celle-ci parcourue par un point mobile, de telle sorte que le vecteur accélération soit sans cesse dirigé suivant cette génératrice. Cette remarque suffit pour suppléer à un calcul un peu fastidieux, qui permet d'écrire les équations représentatives de la surface sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \frac{d^2 x_0}{dt^2}, \\ y = y_0 + \lambda \frac{d^2 y_0}{dt^2}, \\ z = z_0 + \lambda \frac{d^2 z_0}{dt^2}. \end{array} \right.$$

L'intégration de l'équation différentielle des lignes asymptotiques nous permettra d'exprimer λ , et par conséquent x, y, z , en fonction de t et d'une constante arbitraire v , qui sera le paramètre des lignes asymptotiques autres que les génératrices, celles-ci ayant pour paramètre t . Cette équation différentielle est, comme pour toute surface réglée, une équation de Riccati. Mais ici nous en connaissons d'avance la solution

$\lambda = 0$, ce qui nous permettra de pousser son intégration jusqu'aux quadratures. Cette équation a pour premier membre un déterminant dont je n'écrirai qu'une seule rangée verticale; le lecteur voudra bien former les deux autres en remplaçant la lettre x , successivement, par y et par z . Voici cette équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + \lambda \frac{d^4 x_0}{dt^4} + \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 x_0}{dt^3} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \frac{d\lambda}{dt} & \dots \\ \frac{dx_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 x_0}{dt^3} + \frac{d^2 x_0}{dt^2} \frac{d\lambda}{dt} & \dots \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Après quelques transformations intuitives, elle devient

$$\begin{vmatrix} \lambda \frac{d^4 x_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \lambda \frac{d^4 y_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \lambda \frac{d^4 z_0}{dt^4} + 2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{dx_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{dy_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{dz_0}{dt} + \lambda \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

Soient

$$T = \begin{vmatrix} \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} \frac{d^4 x_0}{dt^4} & \frac{d^4 y_0}{dt^4} & \frac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \frac{d^3 x_0}{dt^3} & \frac{d^3 y_0}{dt^3} & \frac{d^3 z_0}{dt^3} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix}.$$

On observe que

$$\frac{dT}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d^4 x_0}{dt^4} & \frac{d^4 y_0}{dt^4} & \frac{d^4 z_0}{dt^4} \\ \frac{dx_0}{dt} & \frac{dy_0}{dt} & \frac{dz_0}{dt} \\ \frac{d^2 x_0}{dt^2} & \frac{d^2 y_0}{dt^2} & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \end{vmatrix},$$

(311)

et l'on écrit l'équation différentielle ci-dessus sous la forme

$$2T \frac{d\lambda}{dt} + T'\lambda + U\lambda^2 = 0,$$

puis on la transforme comme il suit :

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{T'}{2T^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\lambda} + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ou bien

$$-D_t \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{T}} \right) + \frac{U}{2T^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et l'on en déduit, en intégrant,

$$\frac{1}{\lambda \sqrt{T}} = \int \frac{U dt}{2T^{\frac{3}{2}}}$$

ou

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{T} \int \frac{U dt}{T^{\frac{3}{2}}}}.$$

L'intégrale qui figure dans cette équation contient le paramètre v comme terme additionnel.

Les formules (1) deviennent

$$x = x_0 + 2 \frac{\frac{d^2 x_0}{dt^2}}{\sqrt{T} \int \frac{U dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$y = y_0 + 2 \frac{\frac{d^2 y_0}{dt^2}}{\sqrt{T} \int \frac{U dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

$$z = z_0 + 2 \frac{\frac{d^2 z_0}{dt^2}}{\sqrt{T} \int \frac{U dt}{T^{\frac{3}{2}}}},$$

et le problème est ainsi résolu.