

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 286-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__286_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2126

(1909, p. 192.)

Soient a, b, c, d les points de Frégier situés sur les normales PA, PB, PC, PD, menées du point P à une conique (C).

L'hyperbole équilatère passant par a, b, c, d rencontre la conique (C) en quatre points A', B', C', D' , où les normales à la conique (C) sont concourantes en un point P'. Les points de Frégier a', b', c', d' situés sur les normales P'A', P'B', P'C', P'D' sont sur l'hyperbole d'Apollonius relative à P.

(Georges CUNY.)

SOLUTION,

Par M. E.-N. BARISIEN.

Supposons que la conique donnée est l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ les coordonnées de A, B, C, D; (α, β) celles de P; $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x'_4, y'_4)$ les coordonnées de A', B', C', D'; $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), (X_4, Y_4)$ les coordonnées des points de Frégier relatifs à A, B, C, D; $(X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3), (X'_4, Y'_4)$ les coordonnées des points de Frégier a', b', c', d' .

On sait que les coordonnées du point de Frégier a sont, en fonction de celles de A,

$$(1) \quad X_1 = \frac{c^2}{a^2 + b^2} x_1, \quad Y_1 = -\frac{c^2}{a^2 + b^2} y_1.$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à P a pour équation

$$(2) \quad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0.$$

On a donc

$$(3) \quad c^2 x_1 y_1 + b^2 \beta x_1 - a^2 \alpha y_1 = 0.$$

Mais de (1) on tire

$$x_1 = \frac{(a^2 + b^2)}{c^2} X_1, \quad y_1 = -\frac{(a^2 + b^2)}{c^2} Y_1.$$

Ces valeurs étant substituées dans (3), il en résulte

$$(a^2 + b^2) X_1 Y_1 - b^2 \beta X_1 - a^2 \alpha Y_1 = 0.$$

Donc, chacun des quatre points tels que (X_1, Y_1) est situé sur l'hyperbole équilatère

$$(4) \quad (a^2 + b^2) XY - b^2 \beta X - a^2 \alpha Y = 0.$$

Cette hyperbole peut être assimilée à une hyperbole d'Apollonius relative à un point $P'(\alpha', \beta')$, dont l'équation est

$$(5) \quad c^2 XY + b^2 \beta' X - a^2 \alpha' Y = 0.$$

En effet, si l'on identifie (4) et (5), il vient

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} = \frac{\beta'}{-\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Les coordonnées du point P' sont donc, en fonction de celles de P,

$$(6) \quad \alpha' = \frac{\alpha c^2}{a^2 + b^2}, \quad \beta' = -\frac{\beta c^2}{a^2 + b^2}.$$

On a pour un point (x'_1, y'_1) , d'après (5),

$$(7) \quad c^2 x'_1 y'_1 + b^2 \beta' x'_1 - a^2 \alpha' y'_1 = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} X'_1 &= \frac{c^2}{a^2 + b^2} x'_1, & Y'_1 &= -\frac{c^2}{a^2 + b^2} y'_1, \\ x'_1 &= \frac{(a^2 + b^2) X'_1}{c^2}, & y'_1 &= -\frac{(a^2 + b^2) Y'_1}{c^2}. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (7), cette équation devient

$$(8) \quad (\alpha^2 + b^2)^2 X'_1 Y'_1 - b^2 c^2 \beta X'_1 + \alpha^2 c^2 \alpha Y'_1 = 0.$$

Ceci montre que les points α' , b' , c' , d' sont situés sur l'hyperbole

$$(9) \quad (\alpha^2 + b^2)^2 X' Y' - b^2 c^2 \beta X' + \alpha^2 c^2 \alpha Y' = 0.$$

Ce n'est pas l'hyperbole d'Apollonius relative à P, comme le dit l'énoncé. Mais on peut l'identifier avec l'hyperbole d'Apollonius relative à un point $P''(\alpha'', \beta'')$

$$(10) \quad c^2 X' Y' + b^2 \beta'' X' - \alpha^2 \alpha'' Y' = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{c^2}{(\alpha^2 + b^2)^2} = \frac{\beta''}{-c^2 \beta} = \frac{-\alpha''}{c^2 \alpha}.$$

Donc l'hyperbole (9) rencontre l'ellipse en quatre points A'' , B'' , C'' , D'' où les normales à l'ellipse sont concourantes en P'' , dont les coordonnées sont

$$\alpha'' = -\frac{c^4 \alpha}{(\alpha^2 + b^2)^2}, \quad \beta'' = -\frac{c^4 \beta}{(\alpha^2 + b^2)^2}.$$

Autre solution par M. BOUVAIST.