

Certificat de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 235-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__235_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Étant donnée une parabole de foyer F et dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires OX, OY est*

$$y^2 = 8ax;$$

1° On considère un point mobile M qui, à l'origine du temps, se trouve en O et qui décrit la parabole avec une vitesse égale au produit de FM par une constante ω ; calculer les coordonnées du mobile à un instant quelconque t .

2° On suppose que la droite Δ qui touche la parabole

en M roule sans glisser sur cette courbe; trouver la trajectoire du point A de la droite Δ qui se trouvait en O pour $t = 0$.

3° Si P est la projection de F sur Δ , montrer que la longueur AP croît proportionnellement à t , calculer la distance FP en fonction du temps.

4° Connaissant les expressions des longueurs AP, PF, en déduire quel serait le mouvement du foyer F si la parabole se déplaçait relativement à la droite OY supposée fixe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Étudier la nature de la série

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \dots;$$

calculer sa valeur à $\frac{1}{10^6}$ près pour $x = \frac{1}{10}$;

2° Intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} + 10y = 20x + 18e^x - 3e^{-5x}.$$

(Novembre 1908.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère, par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy , une famille de cercles (C), ayant pour équation

$$(x - t^2)^2 + \left(y - t + \frac{t^3}{3}\right)^2 - \left(t + \frac{t^3}{3}\right)^2 = 0,$$

où t désigne un paramètre arbitraire.

I. Construire le lieu (S) du centre de ce cercle. Longueur d'un arc de la courbe (S).

II. Montrer que les deux points de contact de chaque cercle (C) avec l'enveloppe de la famille des cercles (C) sont confondus en un seul point, M, dont on demande d'exprimer les coordonnées en fonctions de t .

Construire la courbe, (Σ), lieu du point M (enveloppe des cercles).

III. Dire quelle est la développée de la courbe (Σ) , et quelle est, en chaque point M de (Σ) , la valeur du rayon de courbure (aucun calcul n'est nécessaire).

IV. On considère un point P de l'espace, mobile de telle manière que sa projection orthogonale sur le plan xOy tombe constamment sur la courbe (S) , envisagée dans I. Déterminer en fonction de t la cote du point P , de telle sorte que la tangente à la courbe décrite par ce point P fasse avec Oz , troisième axe perpendiculaire aux deux premiers, un angle constant.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^x.$$

II. Un point matériel M , mobile dans un plan, et rapporté à deux axes rectangulaires, Ox , Oy , de ce plan, est soumis à l'action d'une force centrale émanant du point O et proportionnelle à la distance MO .

A l'origine des temps, on lance le mobile M , à partir d'une position A , située sur Ox et d'abscisse a , avec une vitesse dont la grandeur v_0 est donnée, mais dont la direction est arbitraire.

Est-il possible de choisir cette dernière direction de manière que le point matériel, parti de A , aille rencontrer un point B , (x_0, y_0) , donné d'avance dans le plan?

Dans quelle région du plan doit être situé le point B pour que le problème soit possible?

(Juillet 1909.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère une courbe C . On désigne par σ l'angle que fait la tangente à la courbe en un point M avec l'axe Ox et par R le rayon de courbure au même point. Déterminer la courbe de façon qu'on ait la relation

$$R = \sin 2\sigma.$$

Construire celle de ces courbes qui passe par l'origine des coordonnées et qui est tangente à Ox . Calculer l'aire

qu'elle limite; calculer à 0,01 près les coordonnées des points où la courbure est minimum.

II. On lance suivant une ligne de pente d'un plan incliné et vers le bas avec une vitesse v_0 un point de masse m . Équation du mouvement en supposant :

1° Qu'il y a un frottement de coefficient $f = \tan \varphi$ sur le plan;

2° Que l'air oppose une résistance proportionnelle à la vitesse et directement opposée à celle ci. On représentera cette résistance par $\lambda m v$, λ étant un coefficient positif et v la vitesse.

A quelle condition le mobile s'arrêtera-t-il? Dans ce cas calculer la durée θ du mouvement et la distance parcourue d .

Développer en série la formule qui donne θ suivant les puissances de λ . En négligeant les puissances de λ supérieures à la première, calculer la valeur simplifiée qui en résulte pour d .

On se donne l'angle α du plan incliné avec l'horizon.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Intégrer l'équation

$$y'(x^2 - 1) - 2xy + \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^2} = 0.$$

Déterminer celle des courbes intégrales qui passe par le point $y = 0$, $x = 2$; calculer à 0,01 près les abscisses des points de rencontre de cette courbe avec la droite $y = 1$.

II. Un prisme homogène a sa base limitée, comme l'indique la figure, par les segments de droites

$$\text{AB,} \quad x = -a, \quad 0 < y < \frac{a}{4},$$

$$\text{CD,} \quad y = a, \quad -\frac{a}{4} < x < \frac{a}{4},$$

$$\text{EF,} \quad x = a, \quad 0 < y < \frac{a}{4},$$

$$\text{FG,} \quad y = 0, \quad \frac{a}{4} < x < a,$$

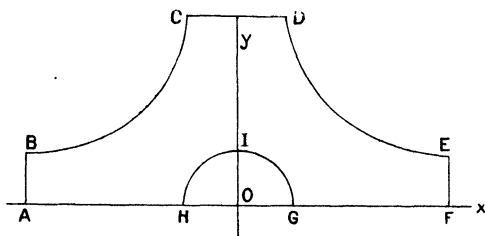
$$\text{HA,} \quad y = 0, \quad -a < x < -\frac{a}{4};$$

(239)

par les deux arcs d'hyperboles

$$\text{BC,} \quad xy = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{DE,} \quad xy = +\frac{a^2}{4},$$



et par le demi-cercle HIG

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{16}, \quad y > 0.$$

Déterminer son centre de gravité.

(Juillet 1909.)