

R. BRICARD

**Sur la « géométrie des feuillets » de M.
René de Saussure. Étude analytique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__1_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R1c]

SUR LA « GÉOMÉTRIE DES FEUILLETS » DE M. RENÉ
DE SAUSSURE. ÉTUDE ANALYTIQUE;

PAR M. R. BRICARD.

INTRODUCTION.

M. René de Saussure a abordé la Géométrie cinématique à un point de vue nouveau. Il considère la *multiplicité* constituée par l'ensemble des positions, dépendant de six paramètres, que peut prendre un solide entièrement libre dans l'espace, et il étudie les diverses formes existant dans cette multiplicité.

Si un solide est assujetti à des conditions, dont le nombre peut varier de un à cinq, l'ensemble de ses positions constitue une *forme* à cinq, quatre, trois, deux ou un paramètres. C'est ce qu'il appelle respectivement une *pentasérie*, une *tétrasérie*, une *trisérie*, une *bisérie* ou une *monosérie*.

Une monosérie est donc en particulier l'ensemble, simplement infini, des positions que prend un solide assujetti à cinq conditions.

Les positions prises par un corps, dans un mouve-

ment *physique* quelconque, forment toujours une monosérie, parce qu'elles dépendent du temps, qui n'a qu'une dimension.

C'est à cause de cette importance physique des monoséries que leur étude est en général considérée comme essentielle. Les séries d'ordre supérieur apparaissent, avec les idées courantes, comme moins intéressantes et de nature plus compliquée, parce qu'elles correspondent à des fonctions contenant un nombre de variables indépendantes de plus en plus considérable. Au contraire, au point de vue de M. de Saussure, qui classe les mouvements, non d'après le nombre des *paramètres* dont ils dépendent, mais d'après le nombre des *conditions* auxquelles est soumis le solide mobile, une série doit être considérée comme d'autant plus simple que son rang est plus élevé.

C'est ainsi par exemple qu'en Géométrie ponctuelle de l'espace, une courbe est plus simple qu'une surface, si l'on introduit une représentation paramétrique. Une surface est au contraire plus simple qu'une courbe, si l'on a égard au nombre des conditions auxquelles satisfait un point de l'être considéré : une surface a une équation, une courbe en a deux. De même, en Géométrie réglée, l'étude du complexe précède celle de la congruence, et l'étude de la congruence celle de la surface réglée.

Tel est le point de vue original et fécond auquel s'est placé M. de Saussure, et ses recherches ont abouti à la constitution de la *Géométrie des feuilletts* ⁽¹⁾.

(¹) Voici la raison de cette dénomination : M. de Saussure, qui a poursuivi ses études par la voie synthétique, a substitué à la considération incommode d'un corps solide indéfini celle d'une figure de nature aussi simple que possible, et dont la position une fois connue détermine sans ambiguïté celle d'un corps qu'on lui suppose

Il a d'abord reconnu que dans cette Géométrie une relation joue un rôle primordial : c'est celle qui existe entre deux positions telles qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une rotation simple. Les deux positions sont alors dites *réci-proques*. Il a ensuite fait ressortir l'importance de certaines séries particulières de positions, dites *couronne*, *couronoïde* et *hypercouronoïde*, qui définissent ce que l'auteur appelle *rotation à 1, 2 et 3 paramètres*, et enfin de la *pentasérie linéaire* (le sens de cette épithète apparaîtra par la suite) constituée par l'ensemble des ∞^5 positions réci-proques d'une position donnée. Les relations qui existent entre ces diverses séries ont amené M. de Saussure à reconnaître une analogie remarquable entre la Géométrie des feuillets et la Géométrie réglée, ainsi qu'à entrevoir l'existence d'une pentasérie linéaire plus générale que celle qu'il a définie et qui correspondrait au complexe linéaire de droites (1).

lie. Une telle figure est le *feuille*t, constituée par une droite orientée, un point de cette droite et un plan orienté qui la contient (On voit que cette figure ne contient plus aucun paramètre de grandeur) Dans les développements qui vont suivre, je suppose la figure liée à un trièdre trirectangle. Je dirai donc, au lieu de *feuille*t, *trièdre* ou encore *position*. Il convient cependant de conserver à la *Géométrie des feuillets* le nom que lui a donné son créateur.

(1) Voici les titres des principaux Mémoires que M. de Saussure a consacrés à la Géométrie des feuillets

Cinématique des fluides Note parue dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles*, Genève, t. V, 1898, p. 497

Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe (*Comptes rendus*, 23 décembre 1901).

Théorie géométrique du mouvement des corps (*Arch. des Sc. ph. et nat.*, Genève, 1902 et 1904).

La Géométrie des feuillets (*Id.*, 1906)

(Ces deux dernières études ont été tirées à part sous forme de brochures en vente à la librairie Kundig, Corraterie, Genève.)

Je me propose dans ce travail de reprendre les théories de M. de Saussure par la voie analytique. Voici les résultats essentiels auxquels on parvient :

On peut représenter toute position d'un corps solide par un système de huit coordonnées homogènes, liées par une relation, et semblables aux six coordonnées plückériennes d'une droite ⁽¹⁾.

La condition de réciprocité de deux positions a la même forme que les conditions de rencontre de deux droites.

La Géométrie des feuillettes est d'après cela entièrement analogue à la Géométrie réglée (*mutatis mutandis*, puisqu'on a affaire à deux coordonnées de plus). En particulier, il existe une pentasérie linéaire générale, correspondant au complexe linéaire de droites.

Tous les faits établis par M. de Saussure et ceux qu'il a conjecturés avec tant de sagacité reçoivent donc une confirmation complète.

La Geometrio folietara Articles en esperanto parus dans l'*Internacia Scienco Revuo*, Geneve, 1908 et 1909.

(Brochure a part en vente chez Kundig)

Je signale particulièrement ce dernier travail, où les idées de l'auteur ont pris leur forme définitive

Il a été rendu compte de la première Partie de la *Geometrio folietara* dans les *Nouvelles Annales*, 1909, p. 422 Cette première Partie est consacrée à la Géométrie cinématique du plan, beaucoup plus simple naturellement que celle de l'espace Elle correspond à la Géométrie ponctuelle de l'espace et présente ainsi un caractère *linéaire*, tandis que la Géométrie cinématique de l'espace présente, comme la Géométrie réglée, un caractère *quadratique*.

Je ne m'occuperai que de la Géométrie des feuillettes de l'espace

⁽¹⁾ Ces huit coordonnées se rencontrent déjà, sous une forme différente, dans un Mémoire d'Olinde Rodrigues inséré au *Journal de Liouville*, t. V, 1840 M. Study les a retrouvées, en faisant usage de l'algorithme des biquaternions, dans son important travail sur les groupes des mouvements (*Mathematische Annalen*, t. XXXIX, 1891) Mais il ne me semble pas qu'on ait encore signalé l'analogie de ces coordonnées avec les coordonnées pluckeriennes de la droite.

I. — COORDONNÉES D'UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

Soient $O_0x_0y_0z_0$ un trièdre trirectangle fixe, $Oxyz$ un trièdre trirectangle variable (de même orientation que le premier), avec lequel on suppose entraînée une figure de grandeur constante. Pour fixer le trièdre $Oxyz$, on peut se donner les coordonnées ξ, η, ζ du point O et les neuf cosinus directeurs des axes Ox, Oy, Oz , par rapport au trièdre $O_0x_0y_0z_0$.

Un premier progrès consiste à exprimer les neuf cosinus directeurs en fonction de quatre paramètres homogènes λ, μ, ν, ρ . On obtient ainsi des formules, dites *d'Euler* ou *d'Olinde Rodrigues*, et dont l'utilité dans les recherches cinématiques est bien connu.

J'écris seulement, pour mémoire, la première de ces formules

$$\cos(\widehat{Ox, O_0x_0}) = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}.$$

Les paramètres λ, μ, ν, ρ ont une signification cinématique intéressante : les deux trièdres $O_0x_0y_0z_0$ et $Oxyz$ étant de même orientation, il existe un axe bien déterminé O_0u tel que le premier trièdre, tournant autour de cet axe, soit amené à avoir ses arêtes parallèles à celles du second. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de cet axe et θ l'angle de la rotation (O_0u est un vecteur et l'angle θ a un signe bien déterminé). On a

$$(1) \quad \frac{\lambda}{\alpha \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\mu}{\beta \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\nu}{\gamma \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\rho}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (1).$$

(¹) Pour la démonstration de ces formules, voir les *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs, Note X, p. 464.

Si l'on suppose donnés λ, μ, ν, ρ (non tous nuls) ces formules et la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

déterminent, on le voit tout de suite, le système des quantités α, β, γ et $\tan \frac{\theta}{2}$ au signe près, c'est-à-dire deux axes de rotation opposés et deux angles de rotation également opposés : ce qui se réduit évidemment à une seule rotation.

λ, μ, ν, ρ sont quatre des coordonnées que je veux introduire. Les quatre autres sont les quantités l, m, n, p , définies par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} l = -\rho\xi - \nu\eta + \mu\zeta, \\ m = -\rho\eta - \lambda\zeta + \nu\xi, \\ n = -\rho\zeta - \mu\xi + \lambda\eta, \\ p = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta. \end{cases}$$

Il existe visiblement entre les huit quantités $l, m, n, p, \lambda, \mu, \nu, \rho$ la relation

$$(3) \quad l\lambda + m\mu + n\nu + p\rho = 0.$$

Inversement, donnons-nous huit quantités $l, m, n, p, \lambda, \mu, \nu, \rho$ liées entre elles par la relation (3), λ, μ, ν, ρ n'étant pas tous les trois nuls.

Il correspondra toujours à ce système une position du trièdre *Oxyz*, parfaitement déterminée.

En effet les quatre équations (2) en ξ, η, ζ forment en vertu de (3) un système compatible, et peuvent toujours être résolues d'une seule manière par rapport à ces quatre quantités, parce que les quatre déterminants de ces équations considérées trois à trois ont pour valeurs respectives, comme on le voit aisément,

$$-\rho U, \quad \lambda U, \quad \mu U, \quad \nu U,$$

en posant

$$U = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2,$$

et ne sont pas tous nuls, en vertu de l'hypothèse faite sur λ, μ, ν, ρ .

En second lieu, comme on l'a déjà vu, la rotation qui amène le trièdre $O_0 x_0 y_0 z_0$ à avoir ses arêtes parallèles à celles du trièdre $Oxyz$ est également bien déterminée.

En résumé, *on peut faire correspondre à toute position du trièdre $Oxyz$, et de façon biunivoque, un système homogène de huit nombres $l, m, n, p, \lambda, \mu, \nu, \rho$, liés entre eux par la relation (3). Ces huit nombres seront dits les coordonnées du trièdre $Oxyz$.*

II. — RÉCIPROCITÉ DE DEUX TRIÈDRES.

Proposons-nous le problème suivant :

Soient deux trièdres, $Oxyz$ et $O'x'y'z'$, de coordonnées respectives $(l, m, \dots, \rho)$ et $(l', m', \dots, \rho')$.

Trouver la relation entre ces coordonnées, qui exprime qu'il existe une rotation simple, amenant le premier trièdre à coïncider avec le second, c'est-à-dire que les deux trièdres sont réciproques, au sens donné dans l'introduction.

Faisons intervenir pour un moment les coordonnées ξ, η, ζ et ξ', η', ζ' des points O et O' par rapport à $O_0 x_0 y_0 z_0$. On a les formes (2) et les formules analogues

$$(4) \quad \begin{cases} l' = -\rho'\xi' - \nu'\eta' + \mu'\zeta', \\ m' = -\rho'\eta' - \lambda'\zeta' + \nu'\xi', \\ n' = -\rho'\zeta' - \mu'\xi' + \lambda'\eta', \\ p' = \lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta'. \end{cases}$$

Soient $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ les paramètres d'une rotation R_1 ,

d'axe Ou_1 , qui amène le trièdre $Oxyz$ à avoir ses arêtes parallèles à celles de $O'x'y'z'$. En général un mouvement hélicoïdal, d'axe parallèle à Ou_1 , est nécessaire pour amener $Oxyz$ à coïncider avec $O'x'y'z'$, et la translation qui entre dans ce mouvement a pour valeur la projection du segment OO' sur Ou_1 . Pour que le mouvement hélicoïdal se réduise à une rotation, il faut et il suffit que cette projection soit nulle, c'est-à-dire que OO' soit perpendiculaire à Ou_1 , ce qui se traduit par la relation

$$(5) \quad \lambda_1(\xi - \xi') + \mu_1(\eta - \eta') + \nu_1(\zeta - \zeta') = 0.$$

Il reste à calculer λ_1 , μ_1 et ν_1 .

Appelons R la rotation de paramètres λ, μ, ν, ρ et R' la rotation de paramètres $\lambda', \mu', \nu', \rho'$. R_1 peut être considérée comme étant le *produit* des deux rotations R^{-1} et R' , effectuées dans l'ordre indiqué. En effet R^{-1} , rotation inverse de R , amène $Oxyz$ à avoir ses axes parallèles à ceux de $O_0x_0y_0z_0$, et R' amène ce dernier trièdre à avoir ses axes parallèles à ceux de $O'x'y'z'$.

On a donc symboliquement

$$R_1 = R^{-1} \cdot R'.$$

Remarquons que R^{-1} a pour paramètres

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad -\rho,$$

comme cela résulte tout de suite des formules (1), où l'on change le signe de θ .

Appliquons maintenant un résultat connu de la théorie des quaternions (1) : considérons les trois

(1) Pour cette application de la méthode des quaternions à la composition des rotations, consulter la note X déjà citée du *Traité de Cinématique* de M. Kœnigs.

(9)

quaternions

$$\begin{aligned}s &= -\rho + \lambda i + \mu j + \nu k, \\ s' &= \rho' + \lambda' i + \mu' j + \nu' k, \\ s_1 &= \rho_1 + \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k,\end{aligned}$$

où i, j, k sont les unités satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned}i^2 &= j^2 = k^2 = -1, \\ jk &= -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k.\end{aligned}$$

On sait que la relation symbolique écrite plus haut

$$R_1 = R^{-1} \cdot R'$$

se traduit par l'identité

$$s_1 = s' s.$$

Développons les calculs : on a

$$\begin{aligned}\rho_1 + \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k \\ = (\rho' + \lambda' i + \mu' j + \nu' k)(-\rho + \lambda i + \mu j + \nu k),\end{aligned}$$

d'où en effectuant le produit du second membre d'après les règles connues, et en égalant séparément les parties scalaires et les coefficients des trois unités,

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -\rho\rho' - \lambda\lambda' - \mu\mu' - \nu\nu', \\ \lambda_1 &= \lambda\rho' - \rho\lambda' + \nu\mu' - \mu\nu', \\ \mu_1 &= \mu\rho' - \rho\mu' + \lambda\nu' - \nu\lambda', \\ \nu_1 &= \nu\rho' - \rho\nu' + \mu\lambda' - \lambda\mu' .\end{aligned}$$

Substituant les valeurs précédentes de λ_1, μ_1, ν_1 dans la relation (5), il vient

$$\begin{aligned}(\lambda\rho' - \rho\lambda' + \nu\mu' - \mu\nu')(\xi - \xi') \\ + (\mu\rho' - \rho\mu' + \lambda\nu' - \nu\lambda')(\eta - \eta') \\ + (\nu\rho' - \rho\nu' + \mu\lambda' - \lambda\mu')(\zeta - \zeta') = 0,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \rho'(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta) + \rho(\lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta') \\ & + \lambda'(-\rho\xi - \nu\eta + \mu\zeta) + \lambda(-\rho'\xi' - \nu'\eta' + \mu'\zeta') \\ & + \mu'(-\rho\eta - \lambda\zeta + \nu\xi) + \mu(-\rho'\eta' - \lambda'\zeta' + \nu'\xi') \\ & + \nu'(-\rho\zeta - \mu\xi + \lambda\eta) + \nu(-\rho'\zeta' - \mu'\xi' + \lambda'\eta') = 0, \end{aligned}$$

ou enfin, en tenant compte des formules (2) et (4),

$$(6) \quad l\lambda' + \lambda l' + m\mu' + \mu m' + n\nu' + \nu n' + p\rho' + \rho p' = 0.$$

Telle est la relation, remarquablement simple, exprimant la réciprocité de deux trièdres.

III. — ANALOGIE DE LA GÉOMÉTRIE DES FEUILLETS ET DE LA GÉOMÉTRIE RÉGLÉE.

On sait que, dans l'espace, on peut attribuer à une droite six coordonnées homogènes $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, dites *coordonnées plückériennes*, et liées par la relation

$$(7) \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

La rencontre de deux droites $(l, m, \dots, \nu)$ et $(l', m', \dots, \nu')$ s'exprime par la condition

$$(8) \quad l\lambda' + \lambda l' + m\mu' + \mu m' + \nu n' + n\nu' = 0.$$

On voit que les relations (3) et (6) sont semblables de formes aux relations (7) et (8), respectivement.

Cela suffit à établir la parfaite analogie de la Géométrie des feuillettes et de la Géométrie réglée : au lieu de droites, on considérera les positions d'un trièdre trirectangle, et la rencontre de deux droites sera remplacée par la réciprocité de deux positions. On n'a donc qu'à se guider sur la Géométrie réglée pour établir la Géométrie des feuillettes dans ses points essentiels. Seulement, comme on a affaire à une multiplicité à six paramètres, au lieu de quatre, on rencontrera dans la nouvelle Géométrie une plus grande variété de formes.

IV. — LA PENTASÉRIE LINÉAIRE.

La première forme qui se présente en Géométrie réglée est le *complexe linéaire*, ensemble des droites dont les coordonnées satisfont à une relation linéaire. Nous allons de même chercher à étudier la *pentasérie linéaire*, ensemble des trièdres $Oxyz$ dont les coordonnées satisfont à une relation

$$(9) \quad Al + Bm + Cn + Dp + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0,$$

où $A, B, C, D, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des coefficients constants.

Remarquons en premier lieu que, si ces coefficients satisfont à la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0,$$

il existe un trièdre de coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C, D$ et l'équation (9) exprime que le trièdre considéré est réciproque à celui-là. On a donc un premier exemple particulier de pentasérie linéaire, constituée par l'ensemble des trièdres qui sont réciproques à un trièdre donné. Une telle pentasérie linéaire sera dite *spéciale*, par analogie avec le *complexe linéaire spécial*, lieu des droites qui rencontrent une droite fixe.

Revenons au cas général. Si dans l'équation (9) on remplace l, m, n, p par leurs valeurs (2), l'équation devient

$$(10) \quad (-A\rho - B\nu - C\mu + D\lambda)\xi + (-B\rho + C\lambda - A\nu + D\mu)\eta \\ + (-C\rho + A\mu - B\lambda + D\nu)\zeta + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0.$$

On peut donner à cette équation une forme plus simple. Soit, en effet, $O_0x'_0y'_0z'_0$ le trièdre qu'on obtient en soumettant le trièdre $O_0x_0y_0z_0$ à la rotation

dont les paramètres sont

$$A, B, C, D.$$

On passera de $O_0 x'_0 y'_0 z'_0$ à $Oxyz$ en composant les deux rotations dont les paramètres sont

$$-A, -B, -C, D \quad \text{et} \quad \lambda, \mu, \nu, \rho.$$

Les paramètres λ, μ, ν, ρ de cette nouvelle rotation s'obtiennent en développant la relation entre quaternions

$$(11) \quad \begin{aligned} \rho + \lambda i + \mu j + \nu k \\ = (\rho + \lambda i + \mu j + \nu k)(D - Ai - Bj - Ck), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(12) \quad \begin{cases} \lambda = -A\rho + B\nu - C\mu + D\lambda, \\ \mu = -B\rho + C\lambda - A\nu + D\mu, \\ \nu = -C\rho + A\mu - B\lambda + D\nu, \\ \rho = -D\rho + A\lambda + B\mu + C\nu. \end{cases}$$

On voit que λ, μ, ν ne sont autres que les coefficients de ξ, η, ζ dans l'équation (10). Cette dernière peut donc s'écrire

$$(13) \quad \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \delta\rho = 0.$$

On peut ensuite résoudre le système (12) par rapport à λ, μ, ν, ρ . On obtient la valeur de ces quantités, plus rapidement que par la résolution directe, en multipliant à droite les deux membres de l'identité (11) par le quaternion

$$D + Ai + Bj + Ck.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \rho + \lambda i + \mu j + \nu k \\ = \frac{(\rho + \lambda i + \mu j + \nu k)(D + Ai + Bj + Ck)}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire λ, μ, ν, ρ .

Les valeurs obtenues sont des fonctions linéaires et homogènes de $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$, qu'il est inutile d'écrire.

En les portant dans l'équation (13), celle-ci prend la forme

$$\lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta + \alpha_1 \lambda_1 + \beta_1 \mu_1 + \gamma_1 \nu_1 - k \rho_1 = 0,$$

où $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, k$ sont des constantes. Remplaçons enfin le trièdre de référence $O_0 x_0 y_0 z_0$ par le trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$, qui en provient par la translation de composantes $-\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1$, et posons

$$\xi + \alpha_1 = \xi_1, \quad \eta + \beta_1 = \eta_1, \quad \zeta + \gamma_1 = \zeta_1.$$

L'équation de la pentasérie linéaire prendra la forme réduite

$$(14) \quad \lambda_1 \xi_1 + \mu_1 \eta_1 + \nu_1 \zeta_1 - k \rho_1 = 0,$$

où $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1$ sont les composantes d'une rotation amenant un certain trièdre fixe $O_1 x'_1 y'_1 z'_1$ (d'axes parallèles à ceux du trièdre $O_0 x'_0 y'_0 z'_0$) à avoir ses axes parallèles à ceux du trièdre $Oxyz$. k est une constante.

Il est facile d'interpréter géométriquement l'équation (14). Considérons en effet le mouvement hélicoïdal qui amène le trièdre $O_1 x'_1 y'_1 z'_1$ en coïncidence avec le trièdre $Oxyz$. Appelons H_1 la valeur de la translation et θ_1 celle de la rotation qui entrent dans ce mouvement; H_1 est la longueur de la projection du segment $O_1 O$ sur l'axe du mouvement, axe dont nous désignerons les cosinus directeurs par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. On a donc

$$H_1 = \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \gamma_1 \zeta_1;$$

mais on a, en vertu des formules (1),

$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1} \cot \frac{\theta_1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\mu_1}{\rho_1} \cot \frac{\theta_1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\nu_1}{\rho_1} \cot \frac{\theta_1}{2}.$$

Il en résulte

$$H_1 = \frac{\cot \frac{\theta_1}{2}}{\rho_1} (\lambda_1 \xi_1 + \mu_1 \eta_1 + \nu_1 \zeta_1),$$

où, d'après l'équation (14),

$$(15) \quad H_1 \tan \frac{\theta_1}{2} = k.$$

On parvient donc à la définition suivante très simple d'une pentasérie linéaire :

Une telle pentasérie est constituée par l'ensemble des positions d'un solide qu'on obtient en donnant à une position fixe un déplacement hélicoïdal dont la translation H_1 et la rotation θ_1 satisfont à la relation

$$H_1 \tan \frac{\theta_1}{2} = k.$$

Si $k = 0$, le déplacement hélicoïdal se réduit à une rotation, et l'on a affaire à la pentasérie spéciale dont il a été question plus haut.

Un autre cas particulier intéressant est celui où l'on a $k = \infty$. L'équation (15) se réduit alors à $H_1 = \infty$, ce qui n'a pas de sens, ou bien à

$$\theta_1 = \pi.$$

Dans la définition de cette nouvelle pentasérie linéaire particulière, la translation du mouvement hélicoïdal ne figure pas. La pentasérie est constituée par l'ensemble des positions d'un solide qu'on obtient en donnant à un solide fixe un développement hélicoïdal dont la rotation est égale à π .

Revenant à la pentasérie linéaire générale, son équation met facilement en évidence des propriétés que M. de Saussure a déjà obtenues géométriquement dans

le cas de la pentasérie spéciale. Pour ne pas allonger ce travail outre mesure, examinons simplement la question suivante :

On considère tous les solides de la pentasérie linéaire qui ont un point fixe. Leur position dépend encore de $5 - 3 = 2$ paramètres et constitue par conséquent une bisérie. Quelle est la définition simple de cette bisérie ?

On n'apporte aucune restriction en supposant que le point fixe considéré est le sommet O du trièdre mobile. En se reportant à la définition des coordonnées l, m, n, p , on voit que l'équation (9) se réduit à

$$a\lambda + b\mu + c\nu + d\rho = 0,$$

où a, b, c, d sont certaines constantes. En raisonnant comme précédemment, on réduira cette équation à la forme

$$\rho_1 = 0,$$

dont l'interprétation est immédiate : le trièdre $Oxyz$ reste constamment symétrique d'un certain trièdre fixe de sommet O par rapport aux droites d'une gerbe ayant le même sommet. Il revient au même de dire, d'après les propriétés élémentaires de la symétrie, que $Oxyz$ reste symétrique d'un trièdre fixe par rapport aux plans d'une gerbe de sommet O.

M. de Saussure donne à une telle bisérie le nom de *couronoïde à point fixe* et au mouvement qu'elle définit le nom de *rotation à deux paramètres*. Ainsi, *le lieu des solides d'une pentasérie linéaire qui ont un point fixe est un couronoïde* (ou une rotation à deux paramètres) *autour de ce point*. On peut rapprocher cette propriété de la suivante : *le lieu des*

droites d'un complexe linéaire qui ont un point fixe est un faisceau plan.

On établirait aussi facilement diverses propositions établies par M. de Saussure et relatives aux *couronnes* et aux *hypercouronoïdes* (rotations à un et à trois paramètres). Une couronne est la monosérie constituée par les positions provenant d'une position fixe par rotation autour d'une droite fixe; un hypercouronoïde (rotation à trois paramètres) est la trisérie constituée par la position symétrique d'une position fixe par rapport à un plan libre de l'espace.

V. — LES SÉRIES LINÉAIRES.

Nous appellerons *tétrasérie linéaire* l'intersection de deux pentaséries linéaires. Autrement dit, une tétrasérie linéaire est le lieu des positions d'un solide dont les coordonnées satisfont à deux équations linéaires

$$(16) \quad \begin{cases} A_1l + B_1m + C_1n + D_1p + \alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu + \delta_1\rho = 0, \\ A_2l + B_2m + C_2n + D_2p + \alpha_2\lambda + \beta_2\mu + \gamma_2\nu + \delta_2\rho = 0. \end{cases}$$

De même, on considérera des *triséries*, *biséries* et *monoséries linéaires* définies par 3, 4 ou 5 équations de la forme précédente.

Parlons d'abord de la tétrasérie linéaire.

On voit que les coordonnées du solide mobile satisfont, en vertu de l'équation (16), à l'équation

$$(17) \quad (A_1 + kA_2)l + (B_1 + kB_2)m + \dots = 0,$$

où k désigne une constante quelconque. On peut dire que les positions qui appartiennent à une tétrasérie linéaire appartiennent à une infinité de pentaséries linéaires formant un faisceau.

Parmi ces pentaséries, il en est deux de spéciales. En

effet, pour que la pentasérie (17) ait ce caractère, il faut que les coefficients de $l, m, n, \dots, p$ soient les coordonnées d'une position.

On doit donc avoir

$$\begin{aligned} & (A_1 + kA_2)(\alpha_1 + k\alpha_2) + (B_1 + kB_2)(\beta_1 + k\beta_2) \\ & + (C_1 + kC_2)(\gamma_1 + k\gamma_2) + (D_1 + kD_2)(\delta_1 + k\delta_2) = 0, \end{aligned}$$

équation du second degré en k , admettant généralement deux racines distinctes. Par conséquent :

Les positions qui appartiennent à une tétrasérie linéaire sont en général réciproques de deux positions fixes.

Cette définition est analogue à celle de la congruence linéaire en Géométrie réglée.

Passons au cas de la trisérie linéaire, définie par les équations

$$\begin{aligned} A_1 l + \dots &= 0, \\ A_2 l + \dots &= 0, \\ A_3 l + \dots &= 0. \end{aligned}$$

Les positions qui appartiennent à la trisérie appartiennent au *réseau* des pentaséries définies par l'équation

$$(A_1 + kA_2 + k'A_3)l + \dots = 0,$$

où k et k' sont deux constantes quelconques. Parmi ces pentaséries, il en est une infinité simple de spéciales, définies par la relation suivante entre k et k' :

$$(A_1 + kA_2 + k'A_3)(\alpha_1 + k\alpha_2 + k'\alpha_3) + \dots = 0.$$

Ainsi les positions qui appartiennent à une trisérie linéaire sont réciproques d'une infinité simple de positions qui forment par suite une monosérie. Cette monosérie est d'ailleurs linéaire : en effet, les huit

coordonnées de ses positions dépendent linéairement de *deux* paramètres k et k' ; on peut donc former entre ces huit coordonnées *cinq* relations linéaires et homogènes.

On raisonnera de même sur la bisérie et la monosérie linéaires. Voici le résumé de la discussion :

Les ∞^4 positions d'une tétrasérie linéaire sont réciproques de deux positions ;

Les ∞^3 positions d'une trisérie linéaire sont réciproques de ∞^1 positions qui forment une monosérie linéaire ;

Les ∞^2 positions d'une bisérie linéaire sont réciproques de ∞^2 positions qui forment une bisérie linéaire ;

Les ∞^1 positions d'une monosérie linéaire sont réciproques de ∞^3 positions qui forment une trisérie linéaire.

On peut dire aussi :

A une monosérie (trisérie) linéaire correspond une trisérie (monosérie) linéaire, telle que toute position de la monosérie (trisérie) soit réciproque de toute position de la trisérie (monosérie).

A toute bisérie linéaire correspond une bisérie linéaire, telle que toute position de la première bisérie soit réciproque de toute position de la seconde.

Il en résulte qu'à une monosérie, une bisérie et une trisérie linéaires données, correspondent respectivement une trisérie, une bisérie et une monosérie linéaires *réciproques*.

Ces théorèmes correspondent (surtout le second, en raison de sa symétrie) à l'existence de l'*hyperboloïde*, où l'on trouve deux monoséries de droites, telles que

toute droite de l'une des monoséries rencontre toute droite de l'autre.

On voit encore qu'une pentasérie, une tétrasérie, ..., une monosérie, sont déterminées respectivement par 7, 6, ..., 3 positions.

De combien de paramètres dépend une série d'ordre déterminé? Une n -série est déterminée par $n + 2$ positions, ce qui donnerait $6(n + 2)$ paramètres. Mais chaque position peut *a priori* être assujettie à n conditions.

Le nombre cherché de paramètres se réduit ainsi à $(6 - n)(n + 2)$. D'après cela :

Une pentasérie dépend de 7 paramètres				
»	tétrasérie	»	12	»
»	trisérie	»	15	»
»	bisérie	»	16	»
»	monosérie	»	15	»

On voit qu'une tétrasérie et un système de deux positions dépendent du même nombre de paramètres, de même une trisérie et une monosérie; ce qui est bien d'accord avec les faits de réciprocité établis plus haut.

Il reste enfin à reconnaître combien six pentaséries linéaires ont de positions communes. Les coordonnées de la position inconnue satisfont à une équation du second degré

$$l\lambda + m\mu + n\nu + p\rho = 0$$

et à six équations linéaires. Le nombre cherché est donc *deux*.

En particulier *il existe en général deux positions réciproques de six positions données*, de même qu'il existe en général deux droites rencontrant quatre droites données.

VI. — CONCLUSIONS.

J'ai simplement esquissé la théorie analytique de la Géométrie des feuilletés. Mais il va sans dire que bien des recherches intéressantes à poursuivre se présentent d'elles-mêmes.

Tout d'abord il faudrait approfondir la nature des séries réciproques (§ V). Le cas des biséries réciproques est particulièrement à signaler, en raison de la symétrie qui s'y manifeste.

On reconnaît assez facilement que les surfaces trajectoires des points d'une position faisant partie d'une bisérie sont du *quatrième* ordre. Les courbes trajectoires des points d'une position faisant partie d'une monosérie sont du *dixième* ordre. Ces surfaces et ces courbes mériteraient d'être étudiées de plus près.

Pour compléter l'étude des pentaséries linéaires, il faudrait chercher ce qui correspond à la notion de *complexes en involution*, si importante en Géométrie réglée ⁽¹⁾. On serait alors conduit à introduire, au lieu des coordonnées $l, m, \dots, p$, huit coordonnées $\omega_1,$

(¹) M. René de Saussure vient tout récemment de répondre à cette question (*Internacia Sciencia Revuo*, numéros de novembre et décembre 1909) : une pentasérie linéaire est définie, d'après l'équation (15), par une position fixe C et un paramètre K. Deux pentaséries (C_1, K_1) et (C_2, K_2) seront dites en *involution* (ou *réciproques*), quand leurs paramètres K_1 et K_2 satisfont à la relation

$$h \tan \frac{\theta}{2} = K_1 + K_2,$$

où h et θ désignent la translation et l'angle du déplacement hélicoïdal qui fait passer de la position C_1 à la position C_2 .

En partant de cette définition, on trouve une série de résultats analogues à ceux que R. Ball a obtenus pour la Géométrie réglée dans sa *Théorie des vis*.

$\omega_2, \dots, \omega_8$, analogues aux coordonnées kleinéennes d'une droite, et liées par la relation

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_8^2 = 0.$$

Enfin il semble très possible que la Géométrie des feuilletés fournisse l'occasion de trouver de nouvelles applications géométriques de la théorie des fonctions abéliennes à plus de deux variables.