

HATON DE LA GOUPILLIÈRE **Théorie algébrique d'un jeu de société**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 177-188

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__177_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[X10]

THÉORIE ALGÈBRIQUE D'UN JEU DE SOCIÉTÉ;

LETTRE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE
A M. BRICARD.

MON CHER CAMARADE,

Seriez-vous disposé à faire, pour une fois, fléchir le
caractère sérieux et élevé de votre excellent Recueil,

Ann. de Mathémat., 4^e série, t. X. (Avril 1910.)

en faveur de l'esquisse algébrique d'un jeu de société? L'énoncé m'en a été indiqué sans aucune explication, et je n'ai pu en connaître l'auteur. J'ai cherché à dégager le principe de sa réussite, ainsi que la forme la plus simple dont soit susceptible son mécanisme.

1. Un membre d'une réunion se déclare en mesure de deviner la date d'une naissance : jour, mois, année, uniquement d'après l'énonciation du résultat d'un calcul qui sera effectué, en dehors de lui, par l'un des assistants, en fonction des éléments numériques connus de ce dernier, à savoir : le quantième du jour, le rang occupé par le mois sur le calendrier et l'âge.

Cette prétention de déduire d'une seule donnée trois inconnues pourra sembler, au premier abord, une hérésie algébrique. Cependant l'Arithmétique élémentaire nous en fournit immédiatement le moyen. Il suffit pour cela de faire ajouter ensemble les produits de ces divers nombres entiers par des puissances de 10 suffisamment différentes les unes des autres pour isoler à coup sûr les trois inconnues dans le résultat total.

Prenons comme exemple la date de la naissance du signataire de cette lettre : 28 juillet 1833. Les valeurs qu'il s'agit de découvrir seront : 28; 7; 33; puisque l'on sait d'avance qu'il s'agit du XIX^e siècle, ce qui permet de faire abstraction des 18 centaines du millésime, en réduisant celui-ci à ce que nous appellerons son *résidu*.

Je suppose (pour outrer à l'extrême la simplicité) que l'on dicte au calculateur la règle suivante : multiplier le jour par 1000, ajouter le mois, multiplier la somme par 1000, ajouter le résidu. Le résultat sera

$$(28.1000 + 7).1000 + 33 = 28\,007\,033,$$

et les trois inconnues s'y lisent immédiatement. Mais

l'artifice serait par trop grossier, et de suite percé à jour.

2. Il nous faut, au contraire, tout en conservant le principe, en masquer le plus possible l'application. Nous disposerons d'après cela, pour former cette fonction linéaire des trois inconnues : jour, mois, résidu, toute une alternance de multiplications et d'additions (ou soustractions); en excluant la division, opération trop complexe pour la circonstance. Le calculateur opérera au moyen de coefficients qui lui seront dictés par le devin, et des données que lui-même possède, à savoir : le jour, j ; le mois, m ; et l'âge, a .

En ce qui concerne ce dernier élément, nous deviendrons expressément qu'il s'accroît chaque année d'une unité, non pas à l'anniversaire comme dans l'usage habituel, mais au 1^{er} janvier, en même temps que le millésime, suivant la loi du recrutement ou de l'admission aux Écoles.

J'énoncerai donc de la manière suivante la règle à suivre pour le calcul, en y affectant des indéterminées provisoires :

A un nombre A ajouter le produit du jour par B, multiplier la somme par C, ajouter le produit du mois par D, multiplier le résultat par E, ajouter le produit de l'âge par F, multiplier le tout par G, et enfin ajouter le nombre H.

La formule qui résume ces opérations est la suivante :

$$(1) \quad \{[(A + Bj).C + Dm].E + Fa\}.G + H,$$

et elle se réduit à

$$(2) \quad BCEG.j + DEG.m + (FG.a + ACEG + H).$$

Nos trois inconnues n'ayant au plus que deux chiffres, cherchons à les cantonner respectivement dans les trois tranches, de deux figures chacune, qui composent un nombre de cinq ou de six chiffres.

3. Il faut, en premier lieu, multiplier j par 10 000, pour le refouler dans la tranche de gauche. Nous poserons donc

$$(3) \quad \text{BCEG} = 10\,000.$$

Nous repoussons de même m dans les centaines par la condition

$$(4) \quad \text{DEG} = 100.$$

Enfin, la parenthèse de la fonction (2) devra reproduire le résidu. Cherchons l'expression de ce dernier.

Je désigne, à cet effet, par p le millésime de la *présente* année, dans laquelle se fait l'opération (1910 au moment où j'écris). Si nous en retranchons l'âge a , nous remontons par là jusqu'à l'an de la naissance. Son millésime est donc $p - a$. Représentons par $100s$ les centaines du siècle de cette naissance (ou d'un événement quelconque, aussi reculé qu'on voudra). Le résidu sera $(p - a) - 100s$.

Posons donc, comme dernière condition :

$$(5) \quad \text{FG}a + \text{ACEG} + \text{H} = p - a - 100s.$$

4. Nous possédons ainsi trois relations auxquelles il nous faut satisfaire à l'aide de huit nombres entiers arbitraires. De là une très large indétermination, qui permettrait de donner à la formule du jeu une infinité de formes différentes.

Quel pourra être notre guide pour faire choix parmi elles de celle qui mérite d'être retenue définitivement,

(181)

comme la mieux adaptée aux circonstances? Une seule considération, mais étroitement suivie d'un bout à l'autre : la plus grande simplicité. On ne saurait en effet demander d'exécuter, dans les conditions supposées, que des calculs extrêmement simples.

Procédons à cette discussion.

3. En divisant membre à membre les égalités (3) et (4) on obtient

$$(6) \quad \frac{BC}{D} = 100, \quad BC = 100 D.$$

Le produit BC est donc au moins égal à 100, et si nous laissons croître D, les coefficients B et C deviendront inutilement considérables. Réduisons-les d'après cela le plus possible en posant

$$(7) \quad D = 1.$$

Il reste alors

$$(8) \quad BC = 100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Nous n'aurons par conséquent que cinq manières de représenter 100 par le produit de deux facteurs entiers, à savoir :

$$(9) \quad 1 \cdot 100, \quad 2 \cdot 50, \quad 4 \cdot 25, \quad 5 \cdot 20, \quad 10 \cdot 10.$$

Les deux modes extrêmes présentent, suivant une remarque précédente, le défaut de trop appeler l'attention sur les puissances de 10. Le troisième introduirait inutilement un multiplicateur de deux chiffres, inconvénient auquel échappent le deuxième et le quatrième. Comme il est d'ailleurs naturel d'employer, pour les opérations successives, des nombres progressivement croissants, nous remarquerons que la quatrième solu-

tion ferait commencer par 5, tandis que la seconde introduit plus simplement 2 pour le début. Adoptons dès lors

$$(10) \quad B = 2, \quad C = 50.$$

D'après la condition (7), l'égalité (4) devient

$$(11) \quad EG = 100,$$

reproduisant la même forme que (8). Nous n'y pouvons donc de nouveau satisfaire que par l'un des cinq modes précédents (9). Mais afin de mieux éclairer notre choix, suspendons-le pour un instant, en continuant le calcul.

L'équation (5) devient, par la substitution des valeurs (10) et (11),

$$FGa + 5000A + H = p - a - 100s$$

et donne

$$(12) \quad H = p - (FG + 1)a - 100s - 5000A.$$

Or les coefficients dictés par le devin au calculateur ne sauraient évidemment dépendre d'éléments qui lui restent inconnus. Il nous faut donc, de toute nécessité, faire disparaître a de l'expression de H , en posant

$$FG + 1 = 0, \quad F = -\frac{1}{G}.$$

Nous nous trouverions ainsi conduits à une division (que nous avons voulu expressément exclure), si nous n'adoptons (11) conformément au premier des modes (9)

$$(13) \quad G = 1, \quad E = 100; \quad F = -1,$$

en passant cette fois, puisqu'il n'est plus possible de

faire autrement, sur l'inconvénient qui nous l'avait fait écarter tout à l'heure. Il vient par conséquent (12)

$$(14) \quad H = p - 100s - 5000A.$$

En ce qui concerne A, nous ne rencontrons aucune considération directrice autre que la simplicité. Nous prendrons donc

$$(15) \quad A = 1.$$

ce qui donne finalement

$$(16) \quad H = p - 100s - 5000.$$

6. J'ai été frappé de voir que la règle qui m'avait été communiquée, sans indication de provenance, reproduit exactement, à l'exception d'un seul, tous les choix auxquels nous venons d'être méthodiquement conduits. On y emploie, en effet, la valeur $A' = 4$, sans que je puisse apercevoir aucun motif déterminant pour ce choix, ainsi que le montrera la discussion du n° 9. Continuons donc de fixer cette constante comme ci-dessus (15), d'une manière encore plus simple.

La formule (1) devient dès lors, par la substitution des diverses valeurs (7), (10), (13), (15), (16)

$$(17) \quad [(2j+1).50 + m].100 - a + (p - 100s - 5000)$$

et s'énonce de la manière suivante :

Doubler le jour, ajouter 1, multiplier par 50, ajouter le mois, multiplier par 100, retrancher l'âge, enfin RETRANCHER un nombre qu'indiquera le devin.

Pour la détermination de ce dernier élément, deux cas pourront se présenter.

En premier lieu, si l'on recherche l'âge d'une personne présente à la réunion, il sera facile au devin de s'assurer d'un seul coup d'œil que celle-ci (ni centenaire, ni enfant trop jeune) est née certainement dans le XIX^e siècle. Faisant donc $s = 18$ et $p = 1910$ dans l'équation (16), il se trouvera conduit à faire *retrancher* le nombre 4890, immuable durant toute cette année 1910, et décroissant ensuite d'une unité à chaque 1^{er} janvier, puisque p augmente alors d'autant.

S'il s'agit au contraire de l'âge d'un inconnu, ou d'une date de pure fantaisie, le devin se verra obligé de demander au préalable dans quel siècle se place l'événement, en limitant là son art divinatoire. Connaissant dès lors s , il évaluera d'après la relation (16) le nombre qu'il devra faire retrancher; lequel deviendra ainsi variable avec chaque cas.

7. Il subsiste toutefois une lacune dans cette explication.

Nous avons bien reculé aux rangs voulus les inconnues j et m ; mais il reste à s'assurer que chacune des parties ne débordera pas par la gauche dans la tranche voisine, en y troublant l'isolement voulu des inconnues.

C'est d'abord évident en ce qui concerne la parenthèse de l'expression (2), puisque nous l'avons expressément assujettie (5) à être égale au résidu, lequel est un nombre de deux chiffres, incapable d'influencer les centaines.

Assurons-nous de même que, dans la fonction (17) qui se réduit à

$$10\,000j + 100m + (p - a - 100s),$$

le premier terme ne saurait se voir adjoindre aucune dizaine de mille de la part du reste de l'expression.

(185)

Il nous faut à cet égard envisager la plus grande valeur que puisse atteindre cette partie. Or, le maximum de m est 12, pour le mois de décembre, et celui du résidu 99. Le total donne 1299, nombre inférieur à 10 000.

8. Si nous reprenons comme exemple la date envisagée ci-dessus (n° 1)

$$j = 28, \quad m = 7, \quad a = 77, \quad s = 18, \quad H = 4890,$$

les calculs se développeront de la manière suivante: en disposant en regard ceux de la formule qui m'avait été indiquée ($A' = 4$, d'où découle pour la présente année $p = 1910 : H' = 19890$).

$$(18) \left\{ \begin{array}{ll} 28.2 = 56, & 28.2 = 56, \\ 56 + 1 = 57, & 56 + 4 = 60, \\ 57.50 = 2850, & 60.50 = 3000, \\ 2850 + 7 = 2857, & 3000 + 7 = 3007, \\ 2857.100 = 285700, & 3007.100 = 300700, \\ 285700 - 77 = 285623, & 300700 - 77 = 300623, \\ 285623 - 4890 = 280733, & 300623 - 19890 = 280733. \end{array} \right.$$

On obtient donc des deux manières le même résultat

$$(19) \quad 28 \quad 07 \quad 33,$$

dans lequel les trois inconnues se trouvent en évidence.

9. Cette manière d'opérer a l'avantage de permettre une divination *instantanée*; mais elle présente en revanche l'inconvénient de mettre encore, malgré les efforts précédents, les assistants sur la voie du secret.

Or, il est bien facile d'écarter définitivement ce défaut en dissimulant complètement le principe. Il

suffit pour cela de limiter le travail fastidieux demandé au calculateur aux six premières opérations, les seules dans lesquelles figurent des nombres inconnus du devin. C'est, à ce moment, ce dernier qui, sur le résultat dont il reçoit alors communication, et qui ne saurait fournir à l'assistance aucune lumière, effectuera secrètement la soustraction de sa constante H qu'il ne divulguera pas, en faisant apparaître, à ses propres yeux seulement, l'isolement des trois inconnues.

C'est ce qu'on observe en effet dans le sixième nombre 300623 de la seconde colonne (18), mais non pas sur celui 285623 de la première. Cette différence tient à ce que la valeur $A' = 4$, plus forte que $A = 1$, s'est trouvée suffisante à cet égard, par sa combinaison avec l'hypothèse $j = 28$. Toutefois ce nombre 4 ne possède en lui-même aucune vertu certaine pour tous les cas, et dès lors ne saurait constituer un choix définitif.

Si l'on veut être assuré d'*obscurcir* à la fois *les deux* chiffres de gauche du sixième nombre, il faut que cette tranche devienne au moins égale à $j + 11$. Nous devons donc poser à cet effet

$$[(2j + A) \cdot 50 + m] \cdot 100 - a \geq 10000(j + 11),$$

d'où l'on déduit

$$A \geq 22 - \frac{m}{50} + \frac{a}{5000}.$$

Mais A est un nombre entier, m est moindre que 13, et a reste très inférieur à 5000. Cette condition donne donc comme valeur la plus simple

$$A'' = 22,$$

résultat évidemment inacceptable dans les circonstances données.

Il faut donc se résigner à courir le risque d'un *unique* chiffre révélateur à gauche, inconvénient qui devient à la vérité minime. Remarquons d'ailleurs que ce chiffre sera fréquemment zéro, et passera dans ce cas inaperçu. Si nous voulons du moins troubler à coup sûr le second, nous devons remplacer dans la formule précédente $j + 11$ par $j + 1$. Elle donne alors

$$A''' = 2,$$

nombre très convenable, qui pourra être adopté, concurremment avec $A = 1$, suivant les préférences individuelles. On pourra même les employer tous les deux successivement pour varier la formule du jeu, si l'on en réitère l'application. Il vient alors (14), pour l'année 1910 et le XIX^e siècle,

$$H''' = 9890.$$

Si nous appliquons ce nouveau mode à l'exemple du n° 8, nous trouverons en effet comme sixième nombre 290623, lequel, par la soustraction de H''' , reproduit pour la troisième fois la séparation des inconnues (19).

Quant au chiffre de droite du sixième nombre, il reste *inévitablement* révélateur, mais sans que cela présente plus d'importance que tout à l'heure. Ce défaut n'existe d'ailleurs que pour 1910. Il disparaîtra dans les neuf années suivantes, pour ne se reproduire qu'en 1920. Cela tient à ce que p est le seul des trois termes de l'expression (14) qui puisse influencer sur le chiffre de droite du sixième nombre, de manière à le ramener à celui des unités du résidu.

10. Si l'on opère sur des époques reculées au delà de l'origine de l'ère chrétienne, s prendra des valeurs négatives dans l'expression (16) du nombre H à employer.

(188)

S'il s'agit, au contraire, d'une date *future*, c'est l'âge a qui deviendra négatif, et dont la soustraction, dans la sixième opération, se changera en une addition.

Recevez, mon cher Camarade, etc.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE,
de l'Institut.