

ÉMILE TURRIÈRE

Sur les surfaces de M. Appell

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10
(1910), p. 145-164

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__145_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'5s]

SUR LES SURFACES DE M. APPELL;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Dans son Mémoire *Sur les déblais et les remblais* ⁽¹⁾, M. Appell a considéré les surfaces telles qu'un pinceau infiniment délié de normales découpe dans la surface d'une sphère donnée de centre O, à l'entrée et à la sortie, des aires équivalentes. Ces surfaces que nous désignerons, à la suite de certains géomètres, sous la dénomination de *surfaces de M. Appell*, jouissent de la propriété suivante : la projection de O sur chaque normale se fait au milieu du segment qui a pour extrémités les centres de courbure principaux. C'est à ce titre que M. Appell a consacré un Mémoire à ces surfaces : *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux* ⁽²⁾.

I.

1. Dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 254), j'ai établi une propriété d'invariance des congruences de normales des surfaces de M. Appell. Je dirai que les deux familles de surfaces parallèles de M. Appell qui

⁽¹⁾ *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXIX, p. 133-137.

⁽²⁾ *American Journal of Mathematics*, t. X, 1888, p. 175-186. — En ce qui concerne les surfaces de M. Appell et les surfaces de M. Goursat, on pourra consulter les *Lezioni di Geometria differenziale* de Bianchi (p. 231).

se correspondent ainsi sont *conjuguées*. Une surface (S) de M. Appell étant représentée en coordonnées de Bonnet par l'équation

$$\varpi = U + V,$$

dans laquelle U et V sont des fonctions arbitraires et respectives de u et v , l'équation

$$\varpi' = i(U - V)$$

représente une des surfaces (S') conjuguées de (S). Il résulte de la définition de la transformation de droites qui fait se correspondre les deux congruences de normales de ces surfaces conjuguées que la *surface (P) lieu des projections P de l'origine O sur les normales aux surfaces (S) est identique à la surface (N') lieu des extrémités N' des moments par rapport à O de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de (S')*. En vertu de la réciprocité entre les surfaces de M. Appell conjuguées, la surface (P'), lieu des projections P' de O sur les normales de (S'), est identique à la surface (N), lieu des extrémités N des moments par rapport à O de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de (S).

Les coordonnées cartésiennes p_4, p_5, p_6 du point N sont

$$p_4 = \frac{i}{2}(1 - u^2)U' - \frac{i}{2}(1 - v^2)V',$$

$$p_5 = -\frac{1}{2}(1 + u^2)U' - \frac{1}{2}(1 + v^2)V',$$

$$p_6 = iuU' - ivV';$$

dans ces formules, U' et V' représentent les dérivées des fonctions respectives U de u et V de v . De ces formules, analogues aux formules d'Enneper pour les surfaces minima, il résulte que les *surfaces lieux des*

points moyens des congruences de normales des surfaces de M. Appell sont des surfaces de translation; les deux courbes qui définissent une surface de cette nature sont des courbes tracées sur des cônes isotropes.

Je n'insiste pas sur l'analogie des formules précédentes avec celles d'Enneper : dans les Mémoires cités, M. Appell a suffisamment mis en évidence l'analogie avec les surfaces minima ⁽¹⁾.

Comme exemples de surfaces de M. Appell conjuguées, je citerai la surface de révolution qui admet pour développée un paraboloïde de révolution de foyer O ⁽²⁾ et la surface de M. Appell que j'ai considérée dans deux Notes précédentes ⁽³⁾; leurs équations respectives sont

$$\varpi = \log(uv), \quad \varpi' = i \log \frac{u}{v};$$

pour ces deux surfaces, (N) et (P) sont des plans. Comme exemple de surface (N) et, par conséquent, de surface (P), je citerai la surface d'équation cartésienne

$$z^4 + 8xz^2 - 16(y^2 + z^2) = 0,$$

qu'on obtient pour

$$\varpi = 2i(v - u);$$

cette surface (N) est une surface de Steiner; elle est

⁽¹⁾ *Sur les déblais et les remblais*, p. 136; *Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux*, p. 182.

⁽²⁾ Pages 135 et 180 des Mémoires cités de M. Appell.

⁽³⁾ *Application de l'équation des télégraphistes aux surfaces dont les images sphériques des lignes de courbure sont des loxodromies*, p. 23; *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques*, p. 37 (*Nouvelles Annales*, 1910).

engendrée par une biquadratique, intersection d'une sphère et d'un cylindre parabolique variables.

2. *Généralisation des surfaces de M. Appell.* — Étant donnée une surface quelconque (S), définie en coordonnées de Bonnet, considérons la surface (N) qui est le lieu des extrémités N des moments, par rapport à un point fixe O, de vecteurs égaux à l'unité portés par les normales de (3). Les coordonnées cartésiennes p_4, p_5, p_6 du point N sont

$$p_4 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_1)}{\partial(u, v)} = \frac{i}{2}(1-u^2)p - \frac{i}{2}(1-v^2)q.$$

$$p_5 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_2)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}(1+u^2)p - \frac{1}{2}(1+v^2)q.$$

$$p_6 = \frac{i}{2}(1+uv)^2 \frac{\partial(\varpi, p_3)}{\partial(u, v)} = iup - ivq.$$

Dans ces formules, p et q désignent les dérivées partielles $\frac{\partial \varpi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \varpi}{\partial v}$ de la distance ϖ de O au plan tangent de (S) au point (u, v) ; nous désignerons par r, s, t les dérivées secondes.

Lorsque la surface (S) est une surface de M. Appell, ayant le point O pour développée moyenne, la surface (N) est de translation et, par conséquent, les courbes coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ sont conjuguées sur cette surface (N). Cherchons les surfaces (S) qui sont telles que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ soient conjuguées sur les surfaces (N) correspondantes.

Prenons pour coefficients directeurs N_1, N_2, N_3 de la normale en N à (N) les jacobiens

$$N_1 = \frac{\partial(p_5, p_6)}{\partial(u, v)}, \quad N_2 = \frac{\partial(p_6, p_4)}{\partial(u, v)}, \quad N_3 = \frac{\partial(p_4, p_5)}{\partial(u, v)};$$

introduisons les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point P

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 + uv)^2 \left(p \frac{\partial p_1}{\partial v} + q \frac{\partial p_1}{\partial u} \right), \quad \dots,$$

et posons, l'indice j ayant successivement les valeurs 1, 2 et 3,

$$\begin{aligned} n_j = & \frac{1}{2}(1 + uv)^2 (rt - s^2) p_j \\ & + pq \left[2uv p_j + (1 + uv) \left(u \frac{\partial p_j}{\partial u} + v \frac{\partial p_j}{\partial v} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2}(1 + uv) \left\{ \begin{aligned} & pt \left[2v p_j + (1 + uv) \frac{\partial p_j}{\partial u} \right] \\ & + qr \left[2u p_j + (1 + uv) \frac{\partial p_j}{\partial v} \right] \end{aligned} \right\}; \end{aligned}$$

N_1, N_2, N_3 ont pour expressions

$$N_1 = u(n_1 + x_0 s), \quad N_2 = v(n_2 + y_0 s), \quad N_3 = i(n_3 + z_0 s).$$

Le déterminant D' de Gauss étant égal à

$$N_1 \frac{\partial^2 p_4}{\partial u \partial v} + N_2 \frac{\partial^2 p_5}{\partial u \partial v} + N_3 \frac{\partial^2 p_6}{\partial u \partial v},$$

la condition pour que les courbes coordonnées soient conjuguées sur (N) est $D' = 0$; la surface (S) satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre

$$\begin{aligned} & [(1 + uv)(pt + qs) + 2upq] \frac{\partial s}{\partial u} \\ & - [(1 + uv)(qr + ps) + 2vpq] \frac{\partial s}{\partial v} \\ & = 2s[u(qr + ps) - v(pt + qs)]; \end{aligned}$$

cette équation peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial [pq(1 + uv)^2, s(1 + uv)^2]}{\partial(u, v)} = 0;$$

observons que la distance Δ de O à la normale est

donnée par la formule

$$\Delta^2 = pq(1 + uv)^2$$

et que la somme des rayons principaux de courbure est

$$R_1 + R_2 = (1 + uv)^2 s + 2\varpi;$$

nous obtenons alors le théorème suivant :

Pour que les courbes coordonnées $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ soient conjuguées sur la surface (N), il faut et il suffit que (S) soit la surface la plus générale pour laquelle il existe une relation entre la distance Δ de O à la normale et l'excès

$$R_1 + R_2 - 2\varpi$$

de la somme des rayons principaux de courbure sur le double de la distance de O au plan tangent.

3. Un premier exemple intéressant est celui des surfaces (S) qui jouissent de la propriété suivante : soient P la projection de O sur la normale; μ le point moyen sur cette normale, c'est-à-dire le point équidistant des deux centres principaux de courbure; le segment P μ est vu de O sous un angle constant θ . L'équation de ces surfaces (S) est

$$s = 2 \tan \theta \frac{\sqrt{pq}}{1 + uv}.$$

On reconnaît là une curieuse équation étudiée par M. Goursat (¹); il résulte d'un théorème de M. Goursat

(¹) *Sur une équation aux dérivées partielles (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXV, 1896, p. 43); Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1899, p. 45).*

que si le segment $P\mu$ de normale de (S) est vu du point O sous un angle dont la tangente trigonométrique est un nombre entier, la surface (S) est déterminable sans quadrature.

4. Un second exemple est celui pour lequel il existe une relation linéaire entre $P\mu$ et $\overline{OP}^2$; soit

$$R_1 + R_2 = 2\varpi + b - \frac{\Delta^2}{a}$$

cette relation, a et b étant des constantes quelconques.

Dans le cas où a est infini, c'est-à-dire dans le cas d'une relation

$$R_1 + R_2 = 2\varpi + b,$$

l'équation des surfaces S est

$$(1 + uv)^2 s = b,$$

et son intégrale est

$$\varpi = U + V + b \log(1 + uv);$$

ce cas, qui contient celui des surfaces de M. Appell ($b = 0$), étant écarté, l'équation à intégrer est

$$(S) \quad as + pq = \frac{ab}{(1 + uv)^2};$$

en effectuant la transformation

$$\varpi = a \log \varpi',$$

celle-ci devient

$$(S') \quad (1 + uv)^2 s' = \frac{b}{a} \varpi'.$$

On reconnaît là l'équation des surfaces de M. Goursat ⁽¹⁾; les cas d'intégration par la méthode de Laplace

(¹) Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au

sont

$$b = -m(m+1)a,$$

m étant entier; l'intégrale correspondante de l'équation des surfaces (S) est

$$\varpi = a \log \left[\sum_{n=0}^{n=m} a_n \frac{u^n V^{m-n} + v^n U^{m-n}}{(1+uv)^n} \right];$$

dans cette expression, $U^{(m-n)}$ et $V^{(m-n)}$ désignent les dérivées d'ordre $m-n$ des fonctions arbitraires U de u et V de v ; on a posé

$$a_1 = -m(m+1).$$

$$a_n = \frac{a_1(a_1+1.2)(a_1+2.3)\dots[a_1+(n-1)n]}{n!}.$$

Je signalerai, incidemment, une propriété des surfaces (S) dans le cas $b = -6a$, cas le plus simple après celui des surfaces de M. Appel et celui des surfaces minima. La transformation

$$\varpi_1 = 2e^{\frac{\varpi}{a}} + \frac{1}{3}k^2,$$

k désignant une constante quelconque, transforme les surfaces (S) en les surfaces (S_1) intégrales de

$$(1+uv)^2(\varpi_1 s_1 + p_1 q_1) + 3\varpi_1^2 - k^2 = 0;$$

celles-ci jouissent de la propriété caractéristique suivante : soient M_1 un point de S_1 ; μ'_1 le symétrique du point moyen μ_1 de la normale à S_1 par rapport à M_1 ;

plan tangent (*American Journal of Mathematics*, t. X, p. 187-204). — L'équation aux dérivées partielles avait été rencontrée dans diverses questions de Géométrie et de Physique; M. Darboux lui avait consacré une Note : *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. XCV, 1882, p. 69).

la sphère de diamètre $M_1\mu'_1$ est orthogonale à une sphère fixe; cette sphère fixe a son centre en O et son rayon est k . Ces surfaces S_1 comprennent, comme cas particulier, les quadriques qui admettent la sphère fixe pour sphère de Monge.

II.

Lorsque les surfaces (N) , (P) , relatives à une surface quelconque (S) et au point O , satisfont à certaines conditions, les surfaces correspondantes (S) sont les intégrales d'équations aux dérivées partielles qui, dans certains cas, peuvent être des équations de Monge-Ampère. Nous allons en donner des exemples.

Nous supposons que la surface (N) est une véritable surface. *Dans le cas où (S) est une surface dont les normales touchent une sphère de centre O , et dans ce cas seulement, la surface (N) dégénère en une courbe.* Pour engendrer, en effet, une surface dont les normales touchent une sphère, on doit considérer une famille quelconque à un paramètre de grands cercles et la congruence des tangentes à ces cercles : (N) est donc la courbe sphérique transformée apsidale, par rapport à O , de la sphère envisagée comme ensemble de cette famille de grands cercles. N_1, N_2, N_3 sont alors nuls et, par suite aussi, les déterminants de Gauss.

Cette remarque explique l'existence de l'intégrale intermédiaire

$$pq(1 + uv)^2 = \text{const.}$$

de plusieurs équations de ce Mémoire.

§. *Condition pour que les normales en P à (P) et en N à (N) concourent.* — Nous avons donné plus

haut les expressions des coefficients directeurs N_1 , N_2 et N_3 de la normale à (N); avec les mêmes notations, on peut prendre pour coefficients directeurs de la normale à (P)

$$P_1 = i(n_1 - x_0 s), \quad P_2 = i(n_2 - y_0 s), \quad P_3 = i(n_3 - z_0 s).$$

Écrivons la condition pour que les normales à (N) et (P) concourent sous la forme

$$\Sigma (N_1 - P_1) [(N_2 p_6 - N_3 p_5) - (P_1 z_0 - P_3 y_0)] = 0,$$

elle devient

$$\Sigma x_0 (N_2 p_6 - N_3 p_5) = 0$$

et, sous cette forme, elle exprime que OP rencontre la normale à la surface (N) en N : les normales en P à (P) et en N à (N) sont donc dans le plan OPN; on est ainsi conduit au théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les normales en P à la surface (P) et en N à la surface (N) soient concourantes est que ces surfaces (P) et (N) soient transformées apsidales l'une de l'autre par rapport à O.

(S) est alors l'intégrale d'une équation de Monge-Ampère à systèmes de caractéristiques confondus

$$(rt - s^2)(1 + uv)^2 \\ + 2qu(1 + uv)r + 2pv(1 + uv)t + 4uvpq = 0 :$$

cette équation admet une intégrale intermédiaire

$$pq(1 + uv)^2 = \text{const.}$$

qui représente les surfaces dont les normales touchent les sphères de centre O.

6. Condition d'orthogonalité des normales en P

à (P) et en N à (N). — Dans le cas précédent, (P) et (N) étant transformées apsidales l'une de l'autre, les normales en P et N sont orthogonales. Cherchons, plus généralement, la condition d'orthogonalité entre les normales en P et N.

Cette condition

$$\Sigma N_1 P_1 \equiv n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + s^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$$

conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui se décompose en deux équations de Monge-Ampère. L'une d'elles est l'équation du n° 5; elle exprime que (P) et (N) sont transformées apsidales. La seconde est

$$(rt - s^2)(1 + uv) + 2uqr + 2vpt + 4pq = 0$$

ou

$$\frac{\partial(\sqrt{p} - v\sqrt{q}, \sqrt{q} + u\sqrt{p})}{\partial(u, v)} = 0.$$

Effectuons la transformation de contact définie par les formules

$$p = u_1^2, \quad q = v_1^2, \quad u = \frac{p_1}{u_1}, \quad v = \frac{q_1}{v_1};$$

cette équation se transforme en l'équation de la *Théorie de la chaleur*

$$r_1 t_1 - s_1^2 + 1 = 0,$$

et, par suite, son intégrale générale est, en désignant par A une fonction arbitraire d'une variable α , par B une fonction arbitraire d'une variable β , et par A' et B' les dérivées de ces fonctions

$$u = \frac{\alpha + \beta}{B' - A'}, \quad v = \frac{A' + B'}{\alpha - \beta},$$

$$w = 4(B - A) + 2(\alpha A' - \beta B').$$

On peut encore appliquer la transformation de con-

tact

$$p = u_2^2, \quad q = q_2^2, \quad u = -\frac{p_2}{u_2}, \quad v = \frac{v_2}{q_2};$$

qui transforme l'équation à intégrer en l'équation de Laplace

$$r_2 - t_2 = 0.$$

7. *Condition pour que (N) soit un cône de sommet O.* — La surface (N) est un cône de sommet O lorsqu'on a

$$\Sigma N_1 p_1 = \frac{1}{2} (q^2 r - p^2 t) (1 + uv)^2 - pq (qv - pu) (1 + uv) = 0;$$

on reconnaît là l'équation des surfaces de Monge (1)

$$\frac{\partial [pq(1 + uv)^2, \varpi]}{\partial(u, v)} = 0.$$

Ainsi :

Pour que (N) soit un cône de sommet O, il faut et il suffit que (S) soit une surface de Monge, admettant O pour sommet du cône-développée.

La surface (P) est alors une surface de Monge.

Je ferai remarquer incidemment que la transformation de contact employée au n° 6 et qui est définie par les formules

$$p = u_2^2, \quad q = q_2^2, \quad u = -\frac{p_2}{u_2}, \quad v = \frac{v_2}{q_2},$$

permet de transformer l'équation, en coordonnées de Bonnet, des surfaces dont les normales touchent une sphère de centre O, en l'équation, en coordonnées cartésiennes, des hélicoïdes dont les normales appar-

(1) C'est l'équation donnée à la page 311 des *Nouvelles Annales* de 1909.

tiennent à un complexe linéaire d'axe Oz . En remarquant, en outre, que toutes les surfaces de Monge dérivent des surfaces dont les normales touchent une sphère par un changement arbitraire de fonction ϖ , on voit qu'on peut prendre pour équations des surfaces de Monge

$$u = \frac{\tan \theta}{\rho^2} - \frac{R'}{\rho}, \quad v = \frac{1}{\frac{\cot \theta}{\rho^2} + \frac{R'}{\rho}},$$

$$\varpi = F\left(\theta + R - \frac{1}{2}\rho R'\right);$$

ces formules sont prolongées par les suivantes

$$p = \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \theta F',$$

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos \theta}{\rho} + \sin \theta R'\right)^2 F';$$

θ et ρ sont deux variables; R est une fonction arbitraire de ρ , de dérivée R' ; F est une fonction arbitraire de

$$\theta + R - \frac{1}{2}\rho R'$$

et F' est la dérivée de cette fonction.

III.

Dans cette troisième Partie, je donnerai une nouvelle démonstration du théorème fondamental d'invariance des congruences des normales des surfaces de M. Appell. A cet effet, j'introduirai une nouvelle représentation analytique des congruences de normales ⁽¹⁾.

(¹) Je ne donnerai ici que les éléments indispensables de cette théorie des congruences de normales : elle sera exposée complètement dans un long travail que je publierai par la suite, et que

8. *Toute congruence de normales peut être définie analytiquement par une fonction homogène et de degré zéro des trois cosinus directeurs des rayons de la congruence.*

Soient, en effet, p_1, p_2, p_3 les cosinus directeurs du rayon D et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection P sur D de l'origine O des axes de coordonnées rectangulaires. Pour qu'une congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que l'expression

$$x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3$$

soit une différentielle exacte.

Dans ces conditions, posons

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \quad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \quad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3},$$

$\Pi(p_1, p_2, p_3)$ étant une fonction homogène et de degré zéro des trois lettres p_1, p_2, p_3 : les dérivées partielles sont calculées comme si p_1, p_2, p_3 étaient indépendants.

L'identité d'Euler exprime que (x_0, y_0, z_0) est la projection sur D de l'origine O; et la relation identique

$$x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3 = d\Pi$$

exprime que la congruence est une congruence de normales.

Réciproquement, donnons-nous une congruence de normales; elle sera définie par une des surfaces orthogonales (S); nous considérerons cette surface, en coordonnées tangentielle, comme enveloppe du plan

$$Xp_1 + Yp_2 + Zp_3 = \varpi;$$

j'ai annoncé à la fin de mon Mémoire : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques* (Nouvelles Annales, 1910, p. 40).

ϖ est une fonction donnée des paramètres de direction de la normale, ou encore de p_1, p_2, p_3 ; en tenant compte de la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1,$$

ϖ peut être, et d'une seule manière, rendue homogène et de degré zéro en p_1, p_2, p_3 : soit Π cette fonction.

ϖ est la distance de O au plan tangent à (S); les coordonnées cartésiennes x, y, z du point de contact seront

$$x = x_0 + \varpi p_1, \quad y = y_0 + \varpi p_2, \quad z = z_0 + \varpi p_3$$

et, pour un déplacement quelconque sur S, on aura

$$p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$p_1 dx_0 + p_2 dy_0 + p_3 dz_0 = -d\varpi = -d\Pi,$$

$$x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3 = d\Pi.$$

Cette dernière relation exprime que x_0, y_0, z_0 sont les dérivées partielles de Π , en regardant p_1, p_2, p_3 comme indépendants.

En résumé, pour avoir une congruence de normales, il suffit de se donner une telle fonction Π et de poser

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \quad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \quad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3};$$

en supposant ensuite que p_1, p_2, p_3 sont les cosinus directeurs d'une droite et x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection de O, on obtient un rayon d'une congruence générale de normales.

9. Comme je l'ai dit plus haut, je réserve l'étude plus approfondie de cette représentation des congruences de normales et de ses applications aux formes fondamentales, au problème de Transon, etc.

Dans le but de montrer comment doivent être faits les calculs, dans la représentation considérée, je donnerai toutefois quelques exemples de résolution de problèmes de Transon.

Un complexe quelconque peut toujours être représenté par une équation

$$f(x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Prenons, par exemple, le complexe d'équation

$$x_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_2, p_3)} + y_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_3, p_1)} + z_0 \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_1, p_2)} = 0,$$

dans laquelle M et M' sont des fonctions homogènes de même degré de p_1, p_2, p_3 . La détermination des congruences de normales appartenant à ce complexe (problème de Transon) est équivalente à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_2, p_3)} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_2} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_3, p_1)} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_3} \frac{\partial(M, M')}{\partial(p_1, p_2)} = 0;$$

on a donc

$$\Pi = \text{fonction arbitraire de } \frac{M}{M'}.$$

Si, en particulier, M et M' sont des formes linéaires en p_1, p_2, p_3 , un changement d'axes permet de se ramener au cas du complexe

$$z_0 = 0$$

des droites équidistantes de deux points. La solution

$$\Pi = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

coïncide bien avec celle

$$\varpi = f_1(\psi)$$

donnée dans mon Mémoire : *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard*... (p. 35).

Soit, en second lieu, le complexe tétraédral attaché au tétraèdre fondamental d'une quadrique; son équation étant

$$\sum \frac{C-B}{A} p_2 p_3 x_0 = 0,$$

on a alors

$$M = A p_1^2 + B p_2^2 + C p_3^2,$$

$$M' = A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2 + C^2 p_3^2,$$

et la solution du problème de Transon est

$$\Pi = f\left(\frac{A p_1^2 + B p_2^2 + C p_3^2}{A^2 p_1^2 + B^2 p_2^2 + C^2 p_3^2}\right).$$

La méthode de la fonction homogène est éminemment propre à la résolution du problème de Transon pour les complexes admettant une surface podaire, c'est-à-dire tels que les projections d'un point fixe O sur les rayons soient sur une surface donnée ⁽¹⁾. Deux cas sont à considérer : ou bien la surface podaire est un cône de sommet O et le problème ne présente alors aucune difficulté, ou bien la surface est quelconque; dans ce second cas, l'intégration de l'équation du problème peut être ramenée à une équation de Jacobi.

Le cas le plus simple est celui pour lequel la surface podaire est un plan ($z_0 = a$) ne passant pas par O. On a alors

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = \frac{a}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

(¹) Cette même question se pose aussi à la seconde partie de ce Mémoire : *déterminer (S) par la condition que (P) soit une surface donnée*.

J'ai donné une solution géométrique, déduite d'un théorème de M. Darboux, dans le cas d'un cône de sommet O, au paragraphe 9 de mon Mémoire : *Conséquence de deux théorèmes de M. Bricard*... (p. 34).

d'où

$$\Pi = a \log \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} - p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + p_3} + f\left(\frac{p_1}{p_2}\right);$$

cet exemple montre bien quelles précautions doivent être prises dans l'emploi de la fonction Π .

10. Revenons aux congruences de normales des surfaces de M. Appell.

Soit une congruence Π de normales et soit la congruence, supposée être une congruence de normales Π' , qui lui correspond dans la transformation de droites que j'ai étudiée dans les *Nouvelles Annales* de 1909 (p. 249). On aura

$$\Pi'(p'_1, p'_2, p'_3) \equiv \Pi'(-p_1, -p_2, -p_3) = \Pi'(p_1, p_2, p_3),$$

puisque Π' est homogène, de degré pair. Exprimons alors les conditions géométriques

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 &= x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2, \\ xx'_0 + yy'_0 + zz'_0 &= 0; \end{aligned}$$

elles se résument en une seule

$$\Delta_1(\Pi + i\Pi') = 0,$$

Δ_1 étant l'invariant différentiel du premier ordre.

Posons

$$\Pi_1 = \Pi + i\Pi';$$

Π_1 est homogène et de degré zéro et représente une congruence de normales; la condition $\Delta_1 \Pi_1 = 0$ exprime que les rayons de la congruence sont à une distance nulle de l'origine O. Une telle congruence est formée par les normales à une surface pour laquelle ϖ est fonction quelconque soit de u , soit de v , en coordonnées de

Bonnet. On a donc

$$\Pi_1 = \Pi + i\Pi' = 2V(v)$$

et, pour la même raison,

$$\Pi - i\Pi' = 2U(u),$$

ce qui conduit aux équations

$$\varpi = \Pi = U + V, \quad \varpi' = \Pi' = i(U - V),$$

données au début de mon Mémoire pour les surfaces de M. Appell conjuguées.

11. Pour terminer, je signalerai un résultat sur des surfaces remarquables considérées par Bonnet et par M. Appell.

Lorsque le déblai et le remblai sont des aires planes homogènes et de même densité, les routes sont normales à des surfaces pour lesquelles les milieux des segments ayant pour extrémités les centres principaux de courbure sont dans un plan ⁽¹⁾; de telles surfaces ont été étudiées et transformées en les surfaces minima par Bonnet dans divers Mémoires cités par M. Appell.

Ces surfaces de Bonnet sont, en d'autres termes, les surfaces qui jouissent de la propriété suivante : la sphère ayant pour diamètre le segment de normale dont les extrémités sont les centres principaux de courbure est orthogonale à un plan fixe. Je me propose, plus généralement, de déterminer les surfaces (S) telles que la *sphère ayant pour diamètre le segment de normale compris entre les centres principaux de courbure soit orthogonale à une sphère fixe.*

Soient O et k le centre et le rayon de cette sphère

(¹) Sur les déblais et les remblais, p. 107.

fixe; l'équation des surfaces (S), en coordonnées de Bonnet,

$$(1 + uv)^2(\varpi s - pq) + \varpi^2 + k^2 = 0,$$

se transforme en

$$(1 + uv)^2 s' + k^2 e^{-2\varpi} + 1 = 0,$$

en posant $\varpi = e^{\varpi'}$; cette dernière équation n'est autre que celle que Weingarten a rencontré dans la théorie de la déformation des surfaces, et qu'il a réduite à l'équation de Liouville (1).