

AURIC

Sur la rectification approchée d'un arc de cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 10 (1910), p. 122-127

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1910_4_10__122_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'21 d]

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE;

PAR M. AURIC.

M. d'Ocagne a donné dans ce *Journal* (1907, p. 1) une très intéressante construction permettant d'obtenir avec une grande approximation la longueur d'un arc de cercle d'extrémités connues ou réciproquement de porter sur une circonférence, à partir d'un point donné, un arc de longueur donnée.

Nous rappelons ce très simple procédé :

Si sur la corde AB on prend

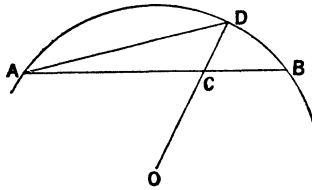
$$AC = \frac{2}{3} AB,$$

et qu'on tire OCD, on aura très approximativement

$$\text{corde AD} = \frac{2}{3} \text{arc ADB.}$$

M. d'Ocagne a obtenu le rapport $m = \frac{2}{3}$ en considé-

Fig. 1.

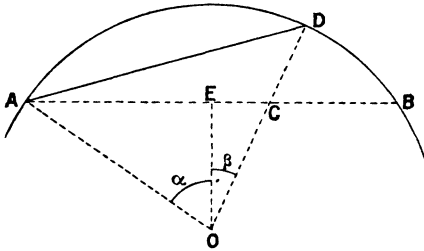


rant un arc infiniment petit; il se trouve, en effet, que dans ce cas la différence

$$\text{corde AD} - \frac{2}{3} \text{arc ADB}$$

est un infiniment petit du cinquième ordre. Mais on

Fig. 2.



peut se demander comment il se fait qu'une construction conduisant à une grande approximation avec un

arc infiniment petit conserve également cette propriété avec un arc fini.

C'est pour répondre à cette question que nous nous sommes posé le problème suivant :

Étant donné l'arc ADB, trouver le rapport $m = \frac{AC}{AB}$ tel qu'on ait RIGOREUSEMENT

$$\text{corde AD} = m \text{ arc ADB.}$$

Les angles α, β étant ceux marqués sur la figure, on aura

$$m = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \right),$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = m \alpha,$$

d'où, en éliminant β ,

$$\sin 2\alpha(1 - 2m^2\alpha^2) = 2\alpha(1 - 2m\sin^2\alpha)\sqrt{1 - m^2\alpha^2}$$

ou

$$\sin^2\alpha \cos^2\alpha = \alpha^2(1 - m^2\alpha^2)(1 - 4m\sin^2\alpha + 4m^2\sin^2\alpha).$$

Telle est la relation (du quatrième degré en m et transcendante en α) qui lie m et α .

Pour $\alpha = 0$, on trouve aisément le point double réel

$$m = \pm \infty$$

et le point double isolé

$$m = \frac{2}{3}$$

qui correspond à la solution de M. d'Ocagne.

Pour $\alpha = k \frac{\pi}{2}$ ($k \neq 0$) on trouve

$$m = \pm \frac{1}{\alpha} = \pm \frac{2}{k\pi},$$

et, en outre, un point double isolé

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{pour } k \text{ impair}$$

et

$$m = \pm \infty \quad \text{pour } k \text{ pair.}$$

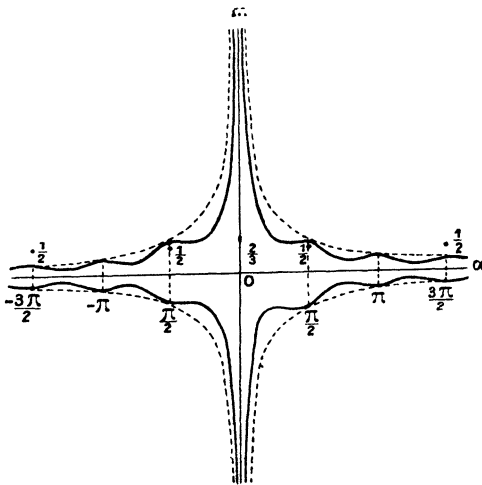
La courbe ne rencontre jamais l'axe des α ; elle se trouve tout entière à l'intérieur des deux hyperboles

$$1 - m^2 \alpha^2 = 0,$$

auxquelles elle est tangente pour $\alpha = k \frac{\pi}{2}$.

Dans ces conditions, la courbe affecte la forme ci-dessous de deux hyperboles ondulées :

Fig. 3.



Le résultat obtenu par M. d'Ocagne provient de ce fait que l'horizontale $m = \frac{2}{3}$ passe par un point double isolé ($\alpha = 0$) et à faible distance du point

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, m = \frac{2}{\pi} = 0,636 \right)$$

qui correspond à la rectification de la demi-circonférence ; c'est ce qui explique l'approximation obtenue.

On réaliserait une approximation aussi grande, mais par un procédé moins simple :

Soit en faisant varier m de $\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{2}$ lorsque α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à réunir les deux points doubles ; soit en prenant $m = \frac{1}{\alpha}$, ce qui revient à remplacer la courbe par l'hyperbole asymptotique ; soit en menant par le point double

$$\left(\alpha = 0, m = \frac{2}{3} \right)$$

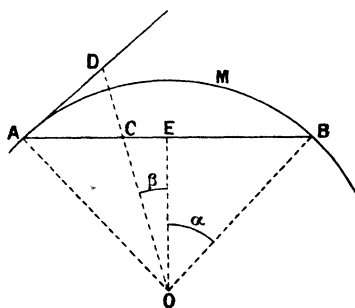
une tangente à la courbe ou plus simplement en joignant ce point double au point

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, m = \frac{2}{\pi} \right).$$

La variation de m avec α rend la solution beaucoup plus compliquée, et dès lors il semble inutile de chercher à perfectionner le procédé donné par M. d'Ocagne.

Nota. — Une remarque analogue peut être faite au

Fig. 4.



sujet du procédé de Snellius (*Cyclometricus*, Leyde, 1621).

Ce procédé consiste à prendre

$$\frac{AC}{AB} = m = \frac{1}{3}$$

et à prolonger OC jusqu'à sa rencontre avec la tangente en A.

On a approximativement

$$\overset{\cdot}{AD} = \frac{1}{3} \text{ arc } AMB.$$

On aura comme précédemment, pour la solution *exacte* du problème,

$$m = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\text{tang } \beta}{\text{tang } \alpha} \right),$$

$$\text{tang}(\alpha - \beta) = 2m\alpha,$$

d'où

$$m = \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} - \frac{1}{2 \alpha \text{ tang } \alpha}.$$

On trouve

$$\text{Pour } \alpha = 0 \dots\dots m = \frac{1}{3}$$

$$» \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \dots\dots m = 1 - \frac{2}{\pi} = 0,3634$$

$$» \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \dots\dots m = \frac{1}{2}$$

De sorte que, pour les faibles valeurs de α , m subit une variation très peu sensible et l'on peut prendre avec une approximation suffisante $m = \frac{1}{3}$; mais, pour des arcs voisins de la demi-circonférence, le procédé est nettement inférieur à celui de M. d'Ocagne.
