

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 571-576

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9_571_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2110.

(1908, p. 480.)

Soit sur une ellipse un point M d'où l'on peut mener à la courbe les normales MA, MB, MC. Soit γ le point de

rencontre de AB et de la parallèle menée de M à la tangente au point C. On a de même sur AC et BC les points β et α . Les points α, β, γ sont sur une même droite parallèle à la tangente au point M à l'ellipse. (CANON.)

SOLUTION,

Par M. G. PÉLISSIER.

Si nous transformons la figure par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre M, la propriété à démontrer devient la suivante : Soient α, β, γ les pieds des normales menées d'un point intérieur ω à une parabole P et ABC le triangle formé par les tangentes aux points α, β, γ ; les perpendiculaires menées des points A, B, C respectivement sur BC, CA, AB concourent en un point H qui est sur le diamètre de P, passant par ω . La première partie de la proposition est évidente, les trois droites considérées étant les hauteurs du triangle ABC; démontrons la seconde partie.

Rapportant la parabole à son axe et à sa tangente au sommet, soient x_0, y_0 les coordonnées de C, point de rencontre des tangentes en α, β . La droite $\alpha\beta$ a pour équation

$$yy_0 - px - px_0 = 0,$$

et les ordonnées des points α, β sont racines de l'équation

$$(1) \quad y^2 - 2yy_0 + 2px_0 = 0.$$

L'ordonnée de γ sera donc, d'après une propriété connue, $-2y_0$, et la tangente à γ , ou BC, aura pour équation

$$px + 2yy_0 + 2y_0^2 = 0.$$

Le point H se trouve sur la perpendiculaire menée de C à cette droite, c'est-à-dire, sur

$$(2) \quad p(y - y_0) - 2y_0(x - x_0) = 0,$$

et, d'autre part, sur la directrice de P

$$(3) \quad x + \frac{p}{2} = 0.$$

Cherchons les coordonnées x, y du point ω . Pour cela il

n'y a qu'à exprimer que l'équation aux ordonnées des pieds des normales menées par ω , qui est

$$y^2 - 2py(x_1 - p) - 2p^2y_1 = 0,$$

admet pour racines $-2y_0$ et les racines de (1). On trouve aisément, pour valeur de y_1 , $-\frac{2x_0y_0}{p}$. Le diamètre de P passant par ω a donc pour équation

$$(4) \quad y + \frac{2x_0y_0}{p} = 0.$$

Les trois équations (2), (3), (4) étant compatibles en xy , la proposition que nous avons en vue est démontrée.

Autres solutions par MM. BARISIEN et BOUVAIST.

2112.

(1908, p. 528.)

Les centres de courbure de l'ellipse les plus rapprochés du centre de la courbe sont ceux qui répondent aux points où la tangente fait le plus grand angle avec la tangente correspondante du cercle principal. (D'OCAGNE.)

SOLUTION,

Par M. R. BOUVAIST.

Soient MT la tangente à l'ellipse, M'T la tangente correspondante au cercle principal, NMI la normale à l'ellipse, N le pied de cette normale, OMI le rayon du cercle principal.

On sait qu'on a

$$OI = a + b,$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

Soit D la distance de O à MN,

$$\sin \widehat{MTM'} = \sin \widehat{OIN} = \frac{D}{a+b},$$

donc $\widehat{MTM'}$ sera maximum avec D.

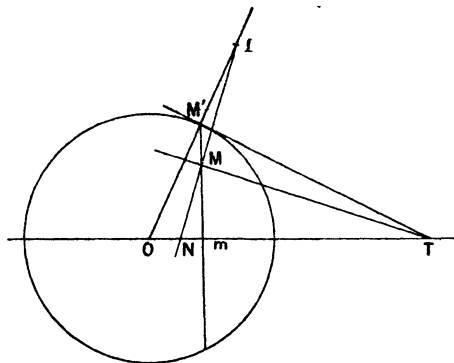
Or les normales à l'ellipse les plus éloignées du centre de la courbe correspondent aux points d'incidence des normales

(574)

à la développée issues du centre de cette courbe : en effet, si une normale à l'ellipse est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = p(\varphi), \quad D = p(\varphi);$$

donc D sera maximum pour $p'(\varphi) = 0$ ou pour une normale à la développée passant par le centre de la courbe.



Si maintenant nous considérons l'équation de la développée sous la forme

$$\rho = f(\omega),$$

nous voyons que ρ sera minimum pour $\rho' = 0$, c'est-à-dire pour une normale à la développée passant par le centre de la courbe.

Autre solution par M. BARISIEN.

2113.

(1908, p. 528.)

Soit M le milieu du côté AB du carré ABCD. Si par le sommet D on mène une droite quelconque qui coupe le côté BC en P et la droite CM en Q, les angles BAP et DBQ sont égaux.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION,

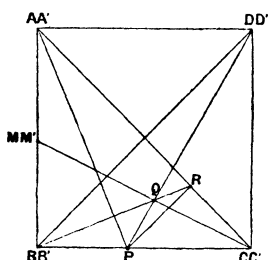
Par M. R. B.

Considérons le carré ABCD comme étant la base d'un cube. Soient A', B', C', D' les sommets de ce cube, non situés dans

(575)

le plan de la figure. Soient M' le centre, projeté en M , de la face $ABB'A'$ et Q' le point de CM' qui est projeté en Q .

La droite $D'Q'$ est située dans le plan $(A'D'CM')$, plan



dont la trace sur le plan de la figure est BC . P est donc la trace de la droite $D'Q'$.

La droite $B'Q'$ est située dans le plan $(B'M'C')$, plan dont la trace est AC . La trace de la droite $B'Q'$ est donc le point R où BQ rencontre AC .

Il résulte de là que PR est la trace du plan $(BD'Q')$, et que par suite PR est parallèle à $B'D'$ ou à BD .

On a donc

$$\widehat{RPC} = \widehat{DBC} = 45^\circ = \widehat{RAB}.$$

Par suite le quadrilatère $ABPR$ est inscriptible et l'on a

$$\widehat{BAP} = \widehat{BRP} = \widehat{QBD}.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions par MM. BARISIEN, BOUVAIST, LEZ, RETALI.

2119.

(1909, p. 100,)

Lorsqu'une courbe (C) roule sur une droite, le symétrique, par rapport au point de contact P de la courbe avec la droite à un instant, du centre de courbure de la roulette décrite par un point M, invariablement lié à la courbe, se trouve sur la polaire de M par rapport au cercle osculateur de (C) au point P. (A. PELLET.)

SOLUTION,

Par M. F. BOULAD.

Appelons O le centre du cercle osculateur, μ le centre de courbure répondant au point M, et K le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur PM. Soient Q et α les points de rencontre respectifs de MO et MP avec la polaire du point M par rapport à ce cercle, N et T les points où ce dernier coupe respectivement MP et Q α .

Élevons en P une perpendiculaire à PM jusqu'à sa rencontre en un point S de OM; tirons S α , ON et les deux parallèles OP et S μ en vertu de la construction de Savary relative à μ .

La tangente MT au cercle et la similitude des deux triangles α QM et OKM donnent

$$\text{d'où} \quad \text{MN} \cdot \text{MP} = \overline{\text{MT}}^2 = \text{MQ} \cdot \text{MO} = \text{M} \alpha \cdot \text{MK};$$

$$\frac{\text{MN}}{\text{M} \alpha} = \frac{\text{MK}}{\text{MP}} = \frac{\text{MO}}{\text{MS}},$$

ce qui montre que NO est parallèle à α S. Mais comme OP est aussi parallèle à S μ , et comme

$$\text{ON} = \text{OP},$$

il en résulte que le triangle μ S α est isocèle. Donc

$$\text{P} \alpha = \text{P} \mu.$$

Autres solutions par MM. AMBLARD, DUBY, GIRAUDON, P. DE LÉPINAY.