

CH. MÉRAY

**Sur les lignes brisées et les aires polygonales
dans le plan, à propos de la division du
polygone en triangles**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 529-555

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K'9a]

**SUR LES LIGNES BRISÉES ET LES AIRES POLYGONALES DANS
LE PLAN, A PROPOS DE LA DIVISION DU POLYGONE EN
TRIANGLES;**

PAR M. CH. MÉRAY.

(Suite.)

§ II. — CONTOURS ET AIRES DANS LE PLAN.

6. Quand la ligne $\mathfrak{L}$ est interminée ($2, I, 2^\circ$), elle-même et ses deux rives sont des figures illimitées (109*, I).

I. Une figure est illimitée, quand on ne peut tracer aucun contour triangulaire dont l'externat n'en contienne quelque point.

1^o Étant pris arbitrairement un point O et une longueur λ , on peut assigner quelque contour triangulaire dont l'internat contienne O , et dont tout point m de l'externat soit à une distance de O supérieure à λ .

A cet effet, nous partagerons l'angle replet de sommet O en trois angles obtus, par autant de demi-droites issues de ce point, sur lesquelles, à partir de lui, nous porterons trois segments $[O\alpha]$, $[O\beta]$, $[O\gamma]$ de longueurs $> \lambda$; sur les droites $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, nous élèverons ensuite des perpendiculaires en α , β , γ , respectivement.

L'angle en O du triangle $\beta O \gamma$ par exemple étant obtus, ses angles en β , γ sont aigus, ainsi par suite que

les angles saillants formés aux mêmes points avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\beta}$, par $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$, demi-perpendiculaires à $O\beta$, $O\gamma$ issues de β , γ , dans les demi-plans $\overline{O\beta\gamma}$, $\overline{O\gamma\beta}$. En outre, $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$ sont dirigées dans le demi-plan opposé à $\overline{\beta\gamma O}$, par là et parce que les demi-droites $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\beta}$ sont visiblement intérieures aux angles droits formés avec $\overline{\beta O}$, $\overline{\gamma O}$ par les mêmes demi-perpendiculaires. Ceci assure la rencontre de ces dernières en quelque point α (224*, I) rendant $\overline{\beta\gamma\alpha}$ opposé à $\overline{\beta\gamma O}$, point intérieur en outre à l'angle saillant $\beta O\gamma$ parce qu'il appartient simultanément aux demi-plans $\overline{O\beta\gamma}$, $\overline{O\gamma\beta}$ dont cet angle est la partie commune. Comme le segment $[\beta\gamma]$ sous-tend ce même angle, il est coupé en un point intérieur α' par la demi-droite intérieure $\overline{O\alpha}$, et α' est intérieur aussi au segment $[O\alpha]$ dont les extrémités, comme nous venons de le voir, sont placées de part et d'autre de la droite $\beta\gamma$. La demi-droite $\overline{\alpha\alpha'}$ contient donc le point O , et, comme elle est intérieure à l'angle saillant $\beta\alpha\gamma$ parce que α' est tel relativement au segment $[\beta\gamma]$ qui sous-tend encore cet angle, son point O l'est également (133*, *passim*).

Pour des causes semblables, les demi-perpendiculaires à $O\beta$, $O\gamma$, qui sont opposées à $\overline{\beta\alpha}$, $\overline{\gamma\alpha}$, couperont les demi-perpendiculaires en α à $O\alpha$, en certains points c , b , et le point O sera intérieur aux angles $\gamma b\alpha$, $\alpha c\beta$ du contour triangulaire $abca$, comme il l'était déjà à $\beta\alpha\gamma$. Il appartient donc à l'intérieur de ce contour.

Soient enfin m un point quelconque de son externat, μ la traversée du contour et du segment $[Om]$ (4, II, 1°), puis $[bc]$ pour fixer les idées, un côté du contour, contenant μ (intérieurement ou à une extrémité). On a $[Om] > [O\mu]$, parce que μ est visiblement intérieur

à $[Om]$, puis $[O\mu] \geq [O\alpha] > \lambda$, parce que $[O\alpha]$ est la distance de O à la droite ℓ_c (263*). On a donc $[Om] > \lambda$, ce qui était à réaliser.

2° La construction du contour $\alpha\beta c\alpha$ du sous-alinéa précédent, faite en prenant pour O quelque point de la figure considérée, puis la combinaison de ses propriétés ci-dessus avec l'hypothèse, montrent immédiatement qu'aucune limite supérieure n'est assignable à la distance mutuelle de deux points indéterminés de cette figure.

II. Notre ligne interminée est une figure illimitée, parce que la restriction comportée par sa définition lui assure la possession de points appartenant à l'externat de tout triangle assignable (cf. §, I, 1°).

Chacune de ses rives jouit de la même propriété, parce qu'on peut y trouver quelque point m aussi rapproché qu'on l'aura voulu, d'un point quelconque de la ligne, la pointe, si on le veut, d'un cil $[mm]$ convenablement choisi en nom et longueur.

III. Ici, rien d'*absolu* ne différencie les deux rives. On peut seulement, comme nous l'avons fait (§, III), les rapporter à quelque point P *spécialement* désigné, que l'une comprendra, que l'autre ne contiendra pas. Ou bien, à l'imitation de la Géographie pour les rivages d'un fleuve, et ceci de préférence dans certaines applications physiques, on suppose un corps humain couché sur la ligne, par une face *déterminée* (dorsale ou ventrale), la direction de la tête aux pieds s'identifiant avec un sens de parcours *préalablement* spécifié pour celle-ci, et l'on prend pour repères les bras droit et gauche étendus dans les deux rives, ce qui fournit immédiatement des dénominations très claires et com-

modes. La rive *droite* sera celle qui contient la pointe d'un cil appliqué sur le bras droit (3, III); les cils *droits* seront tous ceux, enchaînés, dont les pointes tombent dans la rive droite (5, V); les angles *de droite* seront tous ceux, enchaînés, auxquels les cils droits sont intérieurs (3, III); et semblablement, pour les chaînes composées par ces angles, pour..., finalement, pour la rive *gauche* et tout ce qui s'y rattache.

7. Mais, quand il s'agit d'un contour que nous désignerons par $\mathfrak{A}$, une différence essentielle se présente aussitôt entre les deux rives.

L'une est une figure illimitée, à laquelle finit par appartenir tout point mobile s'éloignant indéfiniment; l'autre est une figure limitée (109*, I).

I. Cette proposition a lieu pour un contour triangulaire $\mathfrak{E}$, de sommets α , β , γ .

1° Il y a identité entre l'internat de ce contour et l'une de ses rives, entre son externat et l'autre rive (4).

Deux points, savoir O de l'internat, U de l'externat, appartiennent, l'un à l'une des rives, l'autre à l'autre rive, puisque le segment [OU] traverse le contour une fois seulement (*Ibid*, II, 1°), (5, II, III). On en conclut que tous les points de l'internat appartiennent à une même rive, celle qui ne contient pas U (*Ibid.*); que, de même, tous les points de l'externat appartiennent à celle qui ne contient pas O, puis finalement, l'identité affirmée, puisqu'on retrouve tous les points étrangers au contour, en englobant ceux des deux rives, ou ceux aussi bien de l'internat et de l'externat.

2° Dans la figure $\{\bar{\mathfrak{E}}\}$ formée par l'adjonction des points du contour à son internat (adjonction faite

pour la commodité du langage seulement), la distance mutuelle de deux points indéterminés ne peut surpasser la longueur du plus grand des côtés du contour.

Si deux points m, n appartiennent à un même côté du contour, leur distance $[mn]$ est inférieure à la longueur de celui-ci, égale au plus. Si m, n sont en un sommet α et à l'intérieur du côté opposé, leur distance est inférieure à celui des deux côtés $[\alpha\beta], [\alpha c]$, dont le pied β ou c sur la droite βc est le plus éloigné de celui de la perpendiculaire abaissée de α sur elle (263*).

Si m, n sont intérieurs à deux côtés $[\alpha\beta], [\alpha c]$, leur distance est, de même, inférieure au plus grand des segments $[m\alpha], [mc]$. Si m est sur le contour, n dans l'internat, la demi-droite opposée à $\overline{nm}$ coupe le contour en un point ν donnant $[mn] < [m\nu]$ (4, II, 1°). Si enfin, m, n appartiennent tous deux à l'internat, les demi-droites $\overline{mn}, \overline{nm}$ coupent le contour en des points ν, μ donnant $[mn] < [\mu\nu]$ (*Ibid.*).

Séparément, ou en combinaison, ces diverses observations fournissent la démonstration du fait énoncé, et celui-ci assure la limitation de la figure $\{\overline{\mathfrak{E}}\}$.

3° Dès qu'avec quelque point fixe de la figure $\{\overline{\mathfrak{E}}\}$, un point s'éloignant indéfiniment conserve une distance supérieure au plus grand côté du contour, il ne peut plus appartenir à cette figure. Il ne cesse donc plus d'être placé dans l'externat, ceci entraînant l'illimitation de cette rive.

II. Des points $a, b, \dots$ étant donnés arbitrairement, mais en nombre limité, on peut assigner un contour triangulaire, à l'internat duquel tous appartiennent.

Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$ trois droites arbitrairement choisies,

sans parallélisme toutefois entre deux quelconques, puis $a', b', \dots$ et $a'', b'', \dots$ les projections de $a, b, \dots$ sur Δ , faites parallèlement à Δ' et Δ'' . Le nombre total de ces projections étant limité, on peut assigner sur Δ un segment $[\delta' \delta'']$ auquel toutes soient intérieures; d'après quoi (82*), (133*, I), les points $a, b, \dots$ le seront tous à l'angle $\delta' \delta \delta''$ pris saillant, notation où δ désigne l'intersection des droites $\mathcal{O}', \mathcal{O}''$ menées par δ', δ'' parallèlement à Δ', Δ'' .

De cela, et de ce que les côtés $\bar{\delta}\delta', \bar{\delta}\delta''$ de cet angle contiennent δ', δ'' , on conclut facilement (115*, III) que ces côtés contiennent aussi $a', b, \dots$ et $a'', b, \dots$ projections de $a, b, \dots$ faites sur $\mathcal{O}'$ et $\mathcal{O}''$ parallèlement à Δ . Sur $\bar{\delta}\delta'$ par exemple, on peut donc assigner un point δ' limitant avec δ un segment $[\delta\delta']$ auquel les projections $a', b, \dots$ soient intérieures.

En conséquence, et en nommant $\mathcal{O}$ la parallèle à Δ menée par δ' , coupant $\mathcal{O}', \mathcal{O}''$ en δ', δ'' , les points $a, b, \dots$ seront, comme ces dernières projections, intérieurs au demi-plan $\bar{\mathcal{O}}\delta$. Tous appartiendront donc à l'internat du contour $\delta\delta'\delta''\delta$, région contenant tous les points intérieurs à la fois, à l'angle saillant $\delta'\delta\delta''$ et au demi-plan $\bar{\delta'}\delta''\delta$ (277*, I).

III. *Tous les points de notre contour $\mathfrak{A}$ appartiennent aussi à un internat triangulaire $\{\mathfrak{C}\}$ construit de manière à en contenir les sommets $a, b, \dots$ (II).*

Car il en est ainsi pour chacun des segments $[ab], \dots$, ses côtés (4, II, 3°).

Chemin faisant, on en conclut que *notre contour $\mathfrak{A}$ est une figure limitée* (I, 2°) (cf. V, 2°, inf.).

IV. Soient ensuite P un point fixe pris à volonté

dans l'externat du contour auxiliaire $\mathfrak{C}$ (III), et m un point mobile s'éloignant indéfiniment. Comme m finit par rester dans cette région, rive illimitée de ce contour (I, 3°), la possibilité d'y tracer exclusivement un chemin entre lui et P finit par exister (5, IX, 1°). Jamais ainsi ce chemin ne pouvant aborder le contour proposé $\mathfrak{A}$ dont tous les points appartiennent à l'internat $\{\mathfrak{C}\}$, m finit par appartenir à celle des rives de $\mathfrak{A}$ qui contient P (5), et celle-ci est une figure illimitée comme la longueur du segment $[Pm]$.

V. 1° De cette rive, que nous désignerons par $\{\mathfrak{A}\}_\infty$, et de l'autre $\{\mathfrak{A}\}$, nous pouvons maintenant déterminer les points placés sur une droite quelconque $\mathfrak{M}$, dont nous représenterons par u', u'' des points mobiles s'éloignant indéfiniment, chacun dans une de ses deux directions opposées.

Si $\mathfrak{M}$ n'aborde pas le contour, ses points sont tous dans une même rive (5, IV), et celle-ci est $\{\mathfrak{A}\}_\infty$, parce que u', u'' s'y trouvent quand ils sont suffisamment éloignés.

Autrement, le nombre de ses abords est limité comme celui des côtés, qu'il ne peut visiblement surpasser, et, si ces abords ne sont que des frôlements, tous ses points sont encore dans la même rive, sauf ceux des frôlements, puisqu'ils appartiennent au contour.

Quand il existe des traversées, celles-ci sont en nombre pair $2k$, parce qu'elles sont aussi celles du segment $[u'u'']$, à partir du moment où ses extrémités restent dans $\{\mathfrak{A}\}_\infty$ (5). Nous pourrions alors représenter les segments et points qui les constituent, par

$$[t'_1 t''_1], [t'_2 t''_2], \dots, [t'_{2k-2} t''_{2k-2}], [t'_{2k-1} t''_{2k-1}], [t'_{2k} t''_{2k}],$$

en supposant les notations réglées de manière que

l'ordre

$$t'_1, t''_1, t'_2, t''_2, \dots, t'_{2k}, t''_{2k}$$

soit celui où leurs $4k$ extrémités sont rencontrées successivement par un point mobile décrivant $\mathfrak{N}$ de m' à m'' .

Cela posé, mais sauf ces extrémités et les autres points de tous les abords, les parties de $\mathfrak{N}$ appartenant à $\{\mathfrak{A}\}_\infty$ seront

$$(1) [m't'_1], [t''_2t'_3], [t'_4t''_5], \dots, [t''_{2k-2}t'_{2k-1}], [t'_{2k}m''],$$

où les notations extrêmes représentent les prolongements du segment $[t'_1t'_{2k}]$ au delà de ses première et seconde extrémités ; celles afférentes à $\{\mathfrak{A}\}$ seront les segments, ici tous limités,

$$(2) [t'_1t'_2], [t''_3t'_4], \dots, [t'_{2k-1}t'_{2k}].$$

Effectivement, on aperçoit de suite, que, sur $\mathfrak{N}$, les traversées séparant, des points m' ou m'' indistinctement qui appartiennent à $\{\mathfrak{A}\}_\infty$, tout point m étranger aux abords, sont en nombre pair ou impair selon qu'il est intérieur à l'un des segments (1) ou à l'un de la suite (2).

2° Deux points quelconques m, n de la rive $\{\mathfrak{A}\}$ étant ainsi intérieurs au segment $[t'_1t'_{2k}]$ construit sur leur droite mn comme sur $\mathfrak{N}$ tout à l'heure (1°), et les extrémités de celui-ci appartenant à l'internat du contour triangulaire $\mathfrak{C}$ (III), ses points intérieurs jouissent de la même propriété (4, II, 3°). Par quoi, la totalité de la rive en question n'est qu'une partie de cet internat, limitée comme lui (I, 2°).

VI. Comme si notre contour quelconque $\mathfrak{A}$ n'était que triangulaire (4), (I), nous nommerons *externat* et *internat* ses rives illimitée $\{\mathfrak{A}\}_\infty$ et limitée $\{\mathfrak{A}\}$.

Nous dirons *externes* ceux de ses cils dont les pointes appartiennent à son externat, ceux de ses angles auxquels ces cils sont intérieurs, la chaîne de ces angles, ...; et la qualification *interne* s'appliquera naturellement aux objets de mêmes noms pour son internat.

Un cil $[mm$ étant donné, on trouvera son nom en cherchant le nombre (essentiellement limité) des traversées du contour par la droite mm , qui sont *intérieures* à la demi-droite mm . Il sera visiblement externe ou interne, selon que ce nombre aura été trouvé pair ou impair (V).

Ce nom appartiendra en même temps à la rive où se trouve la pointe m du cil, à l'angle auquel sa demi-droite $\overline{mm}$ est intérieure, à la chaîne dont cet angle fait partie.

La même observation permet inversement d'assigner quelque cil de pied et de nom donnés, puis, par lui, un angle du contour dont le sommet et le nom ont été donnés; de déterminer, par cet angle, par la pointe du cil, une chaîne d'angles, une rive préalablement désignées.

Un premier point d'une rive ayant été obtenu ainsi, la manière la plus simple de la concevoir ensuite consiste à la considérer comme comprenant, avec ce point, les extrémités de tous les chemins issus de lui sans aborder le contour (5).

8. Avec notre ligne interminée $\mathfrak{I}$ (6), ou notre contour $\mathfrak{A}$ (7), les traversées d'un autre contour quelconque $\mathfrak{X}$ sont toujours en nombre pair.

1° Pour la ligne $\mathfrak{I}$, soit $\mathfrak{C}$, comme tout à l'heure (7, II et V, 2°), un contour triangulaire dont l'internat comprenne celui du contour $\mathfrak{X}$, dont l'externat, par

suite, soit compris dans celui de ce dernier (*Ibid.*, VI). Sur $\mathfrak{F}$, dans l'externat de $\mathfrak{E}$, on trouvera, de même qu'au n° 5, I, 1°, deux points $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{u}$ en détachant une partie qui contient tous ses abords avec $\mathfrak{X}$. Ces points se trouvant tous deux dans l'externat de ce dernier, il suffit de faire intervenir la seconde partie du théorème du dernier numéro cité.

2° Pour le contour $\mathfrak{A}$, le raisonnement se calque sur celui du même n° 5, I, 2°.

9. En traçant plusieurs lignes de toutes sortes, pour combiner entre elles quelques-unes, prises entières, et des chemins nés de leurs découpures mutuelles, on obtient des figures très variées qui présentent, tantôt identité, tantôt analogies seulement, avec les rives d'une ligne interminée ou d'un contour. Mais nous nous bornerons à l'examen d'un cas dont les résultats nous seront utiles à connaître, et dont l'exécution donnera une idée suffisante des spéculations de ce genre.

Un contour donné $\mathfrak{A}$ ayant été découpé, par deux points distincts $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ marqués arbitrairement sur lui, en deux chemins $\mathfrak{ma}'\mathfrak{b}'\dots\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{n}$, ou $\mathfrak{C}'$ pour abréger, et $\mathfrak{ma}''\mathfrak{b}''\dots\mathfrak{g}''\mathfrak{h}''\mathfrak{n}$ ou $\mathfrak{C}''$, puis, un troisième $\mathfrak{mr}\dots\mathfrak{wn}$ ou $\mathfrak{C}$ ayant été tracé, arbitrairement aussi, de $\mathfrak{m}$ à $\mathfrak{n}$, dans l'internat $\{\mathfrak{A}\}$ du contour, exclusivement, la fermeture des deux premiers par deux dédoublements de ce troisième donne deux nouveaux contours $\mathfrak{ma}'\mathfrak{b}'\dots\mathfrak{g}'\mathfrak{h}'\mathfrak{nw}\dots\mathfrak{rm}$ ou $\mathfrak{A}'$, et $\mathfrak{ma}''\mathfrak{b}''\dots\mathfrak{g}''\mathfrak{h}''\mathfrak{nw}\dots\mathfrak{rm}$ ou $\mathfrak{A}''$, à propos desquels on a le théorème suivant :

- I. Les contours $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ sont déchevêtrés aussi. —
- II. Les angles internes de $\mathfrak{A}'$ sont : en $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, les parties d' $\mathfrak{mr}$, $\mathfrak{h}'\mathfrak{nw}$ ou $\mathfrak{m}'_i$, $\mathfrak{n}'_i$, détachées par les demi-droites $\overline{\mathfrak{mr}}$, $\overline{\mathfrak{nw}}$, de ceux $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{n}_i$ du proposé, et en

$a', b', \dots g'h'$, ceux mêmes de ce dernier. Et semblablement, pour les angles internes de $\mathfrak{A}''$. — III. Tout point de l'internat $\{\mathfrak{A}'\}$ de $\mathfrak{A}'$ appartient à $\{\mathfrak{A}\}$, en même temps à $\{\mathfrak{A}''\}_\infty$ externat de $\mathfrak{A}''$, et tout point de $\{\mathfrak{A}''\}$ appartient à $\{\mathfrak{A}\}$, $\{\mathfrak{A}'\}_\infty$ simultanément. — IV. Tout point de $\{\mathfrak{A}\}$ (étranger au chemin $\mathfrak{C}$) se retrouve, soit dans $\{\mathfrak{A}'\}$, soit dans $\{\mathfrak{A}''\}$.

I. Le contour $\mathfrak{A}'$ est déchevêtré, parce que ses côtés $[ma']$, ..., $[h'n]$, appartenant à la ligne partielle $\mathfrak{C}'$, ne peuvent, ni se rencontrer en enchevêtrement mutuel à cause du déchevêtrement essentiel au proposé $\mathfrak{A}$, ni rencontrer ses autres côtés $[mr]$, ..., $[wn]$, parce que ceux-ci composent le chemin $\mathfrak{C}$ tracé exclusivement dans l'internat $\{\mathfrak{A}\}$.

II. 1° Parce que le premier côté $[mr]$ du chemin $\mathfrak{C}$, issu du sommet (facultatif ou essentiel) m de $\mathfrak{A}$, n'a que ce point commun avec celui-ci, et que son extrémité r appartient à $\{\mathfrak{A}\}$, la demi-droite $\overline{mr}$ est intérieure à l'angle interne m_i , le décompose additivement ainsi en deux parties $a'mr$, $a''mr$ qui sont des angles m'_i , m''_i de $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, dont il faut trouver les noms.

A cet effet, nous construirons (7, II) un contour triangulaire $\mathfrak{E}$ dont l'internat $\{\mathfrak{E}\}$ contienne tous les sommets de $\mathfrak{A}$, en conséquence, ses côtés et internat (*Ibid.*, III, et V, 2°), en particulier le chemin $\mathfrak{C}$ tracé dans ce dernier, puis ainsi, les côtés et internats de $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ aussi, contour dont, par suite, l'externat $\{\mathfrak{E}\}_\infty$ soit compris dans chacun de ceux de ces derniers. Ensuite, nous nommerons $[ml]$ un cil, de pied m , externe pour $\mathfrak{A}$, et P un point marqué arbitrairement dans $\{\mathfrak{E}\}_\infty$, pouvant par suite être joint à l par un chemin $P...l$, se trouvant tout entier dans $\{\mathfrak{A}\}_\infty$ (5, VII), n'ayant

ainsi aucun point commun avec $\mathfrak{A}$, ni avec $\mathfrak{C}$ dont rien n'appartient à $\{\mathfrak{A}\}_\infty$, ni par là, avec $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$.

De m pris encore pour pied, nous pourrons, dans l'angle m'_i , puisqu'il est une partie de m_i , tracer un cil interne $[mm']$ du contour $\mathfrak{A}$, le faire en outre assez petit pour n'avoir rien de commun non plus (sauf m) avec le chemin $\mathfrak{C}$; par quoi il sera aussi un cil de $\mathfrak{A}'$, et sa pointe m' , appartenant déjà à $\{\mathfrak{A}\}$, tombera dans une rive de $\mathfrak{A}'$ à déterminer maintenant.

Le chemin $P...lmm'$, consistant en $P...lm$ allongé en m du cil $[mm']$, n'a d'autre abord avec $\mathfrak{A}$, avec $\mathfrak{A}'$ aussi bien, que le point m qui est une traversée dans les deux cas, savoir : avec $\mathfrak{A}$, parce que ses extrémités P , m' tombent respectivement dans les rives opposées de ce contour (5); avec $\mathfrak{A}'$, parce que cette première traversée qui place l'amorce $[m]$ dans l'intérieur du biadjacent m_e de l'angle interne m_i de $\mathfrak{A}$ la dirige *a fortiori* dans celui de m'_e biadjacent de m'_i . Effectivement, ce dernier étant compris dans m_i , son biadjacent m'_e comprend au contraire celui de m_i ; d'ailleurs, l'autre amorce $[mm']$ a été prise intérieure à m'_i . De l'existence de cette traversée unique du chemin $P...lmm'$ avec $\mathfrak{A}'$, et de la situation de son extrémité P dans l'externat $\{\mathfrak{A}'\}_\infty$ de celui-ci, il résulte que l'autre extrémité m' appartient à son internat $\{\mathfrak{A}'\}$, puis, que le cil $[mm']$ et l'angle m'_i auquel la demi-droite $\overline{mm'}$ est intérieure, sont internes pour le même contour.

Et semblablement, pour l'autre angle analogue n'_i de $\mathfrak{A}'$, pour ceux, n''_i , n'_i , de $\mathfrak{A}''$, après construction, pour ce contour, d'un cil interne $[mm'']$ analogue à $[mm']$.

2° En a' , l'angle interne a'_i du contour $\mathfrak{A}'$ est, par définition (3, II), celui des biadjacents en ce sommet, auquel le piquetage $b'a'm$ confère l'homotaxie avec son

angle interne m'_i piqueté $a'mr$; et l'angle interne a'_i du proposé $\mathfrak{A}$ est pareillement celui de ses biadjacents en a' , que le même piquetage rend homotaxique à m_i piqueté $a'ma''$. Mais les piquetages précités imposent l'homotaxie encore aux angles m'_i , m_i , parce que leurs premiers côtés sont superposés en $\overline{ma'}$, et que le second côté $\overline{mr}$ du premier est intérieur au dernier, d'après le tracé du chemin $\mathfrak{C}$. Les angles a'_i , a'_i sont donc, non biadjacents, mais identiques, parce que, piquetés tous deux $b'a'm$, ils sont homotaxiques.

L'identité des angles suivants, b'_i , b'_i a pour cause l'état de superposition de leurs sommets et côtés, combiné pareillement avec l'homonymie des relations topographiques que le même piquetage $c'b'a'$ impose à l'un et à l'autre, avec leurs enchaînés sur $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$, savoir les angles identiques a'_i , a'_i affectés tous deux du même piquetage $b'a'm$, comme tout à l'heure. Et de même, pour ..., jusqu'à g , h'_i .

Et semblablement, pour a''_i , b''_i , ..., g''_i , h''_i dans $\mathfrak{A}''$.

III. 1° *Sauf ses extrémités m , n , le chemin $\mathfrak{C}''$ appartient tout entier à l'externat de $\mathfrak{A}'$.*

La demi-droite $\overline{mr}$ étant intérieure à l'angle m_i de côtés $\overline{ma'}$, $\overline{ma''}$, la seconde de ces demi-droites l'est au biadjacent m'_e de m'_i , ces deux-ci de mêmes côtés $\overline{ma'}$, $\overline{mr}$; et, comme m_i est interne pour le contour $\mathfrak{A}'$ (II, 1°), l'autre m'_e est externe. On en conclut que $[ma'']$ est un cil externe pour $\mathfrak{A}'$, puis, que sa pointe a'' appartient à $\{\mathfrak{A}'\}_\infty$, et h'' s'y trouve aussi pour des causes semblables. Le chemin $a''b'' \dots g''h''$ y est donc tracé tout entier, puisque ses extrémités appartiennent à cette rive de $\mathfrak{A}'$ et qu'il n'aborde pas ce dernier; le chemin $ma''b'' \dots g''h''n$, ou $\mathfrak{C}''$ également (sauf les restrictions concernant ses extrémités).

Et semblablement, pour le chemin $\mathbb{C}'$ et le contour $\mathbb{A}''$.

2° Soit maintenant n' un point quelconque de $\{\mathbb{A}'\}$, que, par suite, nous pouvons réunir à m' , autre point du même internat (II, 1°), par un chemin s'y trouvant tout entier. Ce chemin n'abordant ni la partie $\mathbb{C}'$ du contour proposé $\mathbb{A}$ pour cette cause, ni son autre partie $\mathbb{C}''$ (1°), tous ses points appartiennent à une même rive de ce contour, qui est $\{\mathbb{A}\}$, puisque m' s'y trouve. Le point considéré n' appartient donc aussi à cet internat.

Et semblablement, pour tout point n'' de $\mathbb{A}''$.

3° Revenons au cil interne $[mm'']$ dont la construction pour $\mathbb{A}''$ a été mentionnée plus haut (II, 1°, *in fine*).

Comme la demi-droite $\overline{ma''}$ est intérieure à m'_e angle externe de $\mathbb{A}'$ (1°), elle le décompose en deux parties dont l'une est m''_e , et la demi-droite $\overline{mm''}$ intérieure à ce dernier l'est aussi à m'_e . Les cils $[mm']$, $[mm'']$ étant ainsi intérieurs, le premier à m'_e , le second à m_e , et ces angles étant déchainés dans $\mathbb{A}'$, ce contour est traversé au point unique m par le chemin $m'mm''$. L'extrémité m'' de celui-ci appartient donc à $\{\mathbb{A}'\}_\infty$, puisque l'autre m' est dans $\{\mathbb{A}'\}$.

Soit enfin n'' un autre point de l'internat de $\mathbb{A}''$, qu'ainsi nous pouvons joindre à m'' par un chemin $m'' \dots n''$ sans abord avec ce contour, avec sa partie $\mathbb{C}$ en particulier, ni, par suite, avec $\mathbb{A}'$ composé de $\mathbb{C}$ et de $\mathbb{C}'$ qui est tout entier dans $\{\mathbb{A}''\}_\infty$ (1°). Par là, et par ce qui précède, le chemin $m'mm'' \dots n''$ traverse $\mathbb{A}'$ au point unique m . Son extrémité n'' appartient donc encore à $\{\mathbb{A}\}_\infty$, parce que l'autre m' se trouve dans $\{\mathbb{A}\}$.

Et semblablement, pour tout point n' de $\{\mathbb{A}'\}$, relativement à $\{\mathbb{A}''\}_\infty$.

IV. Pour terminer, soient n un point quelconque de l'internat du contour proposé, composé de $\mathbb{C}'$ et de $\mathbb{C}''$, puis $m' \dots n$ un chemin conduisant de m' à n , sans abord avec lui. Comme ainsi ce chemin n'aborde ni la partie $\mathbb{C}'$ de $\mathbb{A}'$, ni la partie $\mathbb{C}''$ de $\mathbb{A}''$, le nombre θ de ses traversées avec leur partie commune $\mathbb{C}$ est aussi celui de ses abords du même nom avec $\mathbb{A}'$ ou $\mathbb{A}''$, indistinctement.

Si donc θ est pair, son extrémité n appartiendra à $\{\mathbb{A}'\}$, puisque l'autre m' s'y trouve. S'il est impair, n appartiendra à l'internat de $\mathbb{A}''$; effectivement, m' est dans son externat, puisqu'il appartient à $\{\mathbb{A}'\}$ (III, 3, *in fine*).

10. Jusqu'au n° 11 (*inf.*), il nous sera commode de réduire, au seul mot *diagonale* d'un contour donné quelconque $\mathbb{A}$ non triangulaire, la désignation d'une diagonale *essentielle*, *interne*, c'est-à-dire de tout segment terminé par deux sommets essentiels et dont les points intérieurs appartiennent en totalité à son internat $\{\mathbb{A}\}$.

Au moyen de côtés et de diagonales du contour considéré, on peut former, en nombre limité, des contours triangulaires qui remplissent les conditions suivantes : l'internat de chacun appartient à celui du proposé, mais à l'externat de chacun des autres, et l'internat du contour proposé est reproduit par la réunion de ceux de tous les contours triangulaires ainsi construits, avec adjonction des points intérieurs aux diagonales employées.

1. Le contour possède une diagonale au moins.

Soient ϵ_i un quelconque de ses angles internes non neutres (7, VI), et $[\epsilon d]$, $[\epsilon f]$ ses côtés essentiels, soudés au sommet ϵ . Une demi-droite mobile $\bar{\epsilon}m$ restant intérieure à cet angle conservera certainement, avec le con-

tour, quelque abord (ne contenant pas son origine ϵ); car, si elle arrivait à ne pas le traverser, tous ses points appartiendraient à l'externat, et ϵ_i serait un angle externe contrairement à l'hypothèse. En nommant alors m le point de tous ces abords qui est le plus rapproché de ϵ , le segment $[\epsilon m]$ ne devient jamais nul, sans quoi le contour serait enchevêtré en ϵ .

Si, dans une position initiale de $\bar{\epsilon}m$ prise au hasard, m est un sommet essentiel, ce segment est une diagonale, parce que ses extrémités sont des sommets du contour, et que tous ses points intérieurs appartiennent à l'internat de celui-ci (7, V).

Si, au contraire, m est intérieur à un côté $[s_3]$, nous l'y ferons mouvoir, à partir de cette première position, d'abord dans quelque sens constant, puis dans le sens opposé, jusqu'à survenue, visiblement nécessaire, de l'un ou l'autre des accidents suivants : 1° m atteint l'un des sommets $s, 3$, sans que la demi-droite $\bar{\epsilon}m$ ait, avec le contour, ou ait eu, quelque point commun, intérieur au segment $[\epsilon m]$; 2° avant que m ait atteint un de ces deux points, cette demi-droite arrive en une position où elle présente, avec le contour, un ou plusieurs abords, parmi les points de tous lesquels, le plus rapproché, n , de ϵ , est intérieur au segment $[\epsilon m]$; 3° elle s'applique sur l'un, puis sur l'autre des côtés $\bar{\epsilon}d$, $\bar{\epsilon}f$ de l'angle considéré, sans qu'aucune des deux éventualités précédentes se soit présentée auparavant. [Le cas où la demi-droite mobile atteindrait, dans des conditions différentes, un point n d'un côté autre que $[s_3]$, a été tacitement écarté; effectivement, si n était sur $[s_3]$ (ou bien en ϵ) le contour y serait enchevêtré; s'il n'appartenait qu'à l'autre côté, il en serait une extrémité libre de soudure, et la ligne considérée $\mathfrak{A}$ y serait ouverte, au lieu d'être un contour.]

1° Le segment $[es]$, ou $[e_3]$, répond à la question, comme $[em]$ avant l'ouverture de cette discussion.

2° L'abord survenu est un frôlement, parce que, en cas de traversée, si celle-ci avait un point commun avec $[s_3]$, le contour y serait enchevêtré; si elle n'en avait aucun, une position antérieure de la demi-droite $\bar{em}$ aurait rencontré le contour en quelque point intérieur au segment $[em]$. Quant au point n , il est un sommet du contour, parce qu'il fait partie d'un frôlement d'une droite, em , avec une ligne brisée, $\mathfrak{A}$, abord se réduisant visiblement à un sommet, ou bien embrassant la totalité d'un côté essentiel, et que si, dans le dernier cas, il était intérieur à ce côté d'abordage, il ne serait pas le plus rapproché de e parmi tous les points de celui-ci. Le segment $[en]$ répond donc à la question, comme $[em]$, tout à l'heure.

3° On aperçoit immédiatement que $\bar{ed}$, $\bar{ef}$, côtés de l'angle e_i , coupent la droite s_3 du côté considéré, en des points d' , f' limitant un segment dont tous les points appartiennent à ce côté, et qui est décrit par m , en même temps que l'angle e_i par $\bar{em}$, ceci conférant à cet angle la propriété d'être saillant. En outre, d' ne peut être intérieur au côté $[ed]$, ni f' à $[ef]$, car, autrement, le contour y serait enchevêtré. Enfin, les points intérieurs au segment variable $[em]$ ne cessent jamais d'appartenir à l'intérieur du contour.

Maintenant, si d' , f' appartiennent aux prolongements des côtés $[ed]$, $[ef]$ au delà de leurs extrémités d , f , les demi-droites $\bar{dd'}$, $\bar{ff'}$ sont opposées à $\bar{de}$, $\bar{fe}$; par quoi, d' , f' sont tous deux intérieurs à l'opposé du demi-plan $\bar{dfe}$. Et le segment $[d'f']$ est tel en même temps; car, si l'un de ses points intérieurs appartenait à $\bar{dfe}$ ou à son arête seulement, ses extrémités d' , f' ne

seraient pas dans le demi-plan opposé, toutes deux. En faisant donc décrire l'angle ϵ_i par la demi-droite $\overline{\epsilon m}$, et considérant, avec sa trace m sur $[d'f']$, son intersection μ avec $[df]$ autre segment sous-tendant cet angle, les demi-droites $\overline{\mu\epsilon}$, $\overline{\mu m}$ sont sans cesse opposées, et le point μ reste ainsi intérieur au segment $[\epsilon m]$. Il appartient donc sans cesse à l'intérieur du contour, ce qui confère la qualité de diagonale au segment $[df]$ décrit par lui.

Et semblablement, si d' se confondait avec d , ou bien f' avec f .

Si ces confusions existaient toutes deux, notre côté $[\epsilon\zeta]$ ne serait pas autre chose que le segment $[df]$, et notre contour serait triangulaire, cas écarté.

(On aperçoit ainsi que *le contour peut être dépourvu de toute diagonale issue d'un sommet donné*, ceci se présentant visiblement quand on se trouve en présence de l'éventualité 3°. Mais, *si l'angle ϵ_i est rentrant, l'existence d'une telle diagonale est certaine*. Cette éventualité ne peut effectivement se produire, parce que la droite $\epsilon\zeta$ ne peut rencontrer simultanément les deux côtés d'un tel angle.)

II. 1° Les extrémités m , n d'une diagonale $[mn]$, que nous noterons $\mathbb{C}(1)$, divisent notre contour $\mathbb{A}$ en deux chemins $\mathbb{C}'$, $\mathbb{C}''$ dont les associations avec des dédoublements de $\mathbb{C}$ donnent deux nouveaux contours $\mathbb{A}'$, $\mathbb{A}''$; et ces diverses figures jouissent des propriétés relatives de celles qui ont été étudiées tout à l'heure sous les mêmes notations (9), avec une particularité spéciale : le chemin $\mathbb{C}$, simple segment rectiligne, n'ayant aucun sommet essentiel, les deux contours dérivés, dans leur ensemble, non seulement possèdent tous les sommets essentiels du proposé, m et n pris deux fois chacun,

mais ils n'en ont point d'autres, et ils n'ont d'autres angles internes que les siens ailleurs qu'en m , n , que de simples parties m'_i , m''_i et n'_i , n''_i de m_i , n_i en ces derniers sommets.

Dans chacun des contours dérivés, s'il n'est triangulaire, on pourra donc (I) tracer une diagonale qui, naturellement, sera distincte de $\mathbb{C}$ et appartiendra visiblement au proposé, puis en dériver deux nouveaux contours auxquels les mêmes remarques sont applicables, puis recommencer l'opération sur chacun de ces contours deux fois dérivés; et ainsi de suite, autant que faire se pourra.

2° Dans l'ensemble de tous les contours, originaire et dérivés, procurés successivement par ces opérations, comme dans une famille d'êtres vivants multipliés par fission, on peut dire deux d'entre eux, *apparentés* : premièrement *en ligne directe*, au degré δ , quand l'un $\mathbb{A}^{(i)}$ l'*ascendant*, l'autre $\mathbb{A}^{(i+\delta)}$ le *descendant*, terminent une suite, $\mathbb{A}^{(i)}$, ..., $\mathbb{A}^{(i+\delta)}$, de $\delta + 1$ contours, dans laquelle chaque intermédiaire et le dernier ont été engendrés de leurs antécédents immédiats, comme $\mathbb{A}'$ par exemple l'a été de $\mathbb{A}$; deuxièmement, *en ligne collatérale*, quand ils ne le sont pas en ligne directe. Ces dénominations faciliteront sensiblement l'énonciation de certains élargissements des observations précédentes, qui s'apercevront aisément :

Les côtés, sommets et diagonales d'un descendant se retrouvent tous parmi les éléments similaires de l'un quelconque de ses ascendants.

Chacun de ses angles internes est, pour l'ascendant, un tel angle ou l'une de ses parties; son internat est une partie de celui de l'ascendant.

Les internats de deux collatéraux n'ont aucun point commun.

Si, dans la famille, on forme une représentation complète, c'est-à-dire si l'on groupe plusieurs collatéraux, tels, en nombre et autrement, que tout autre membre soit apparenté en ligne directe à quelqu'un d'entre eux, tout point de l'internat du contour proposé se retrouve dans celui de l'un ou de l'autre des membres de cette représentation, ou bien à l'intérieur d'une diagonale employée.

III. Dans le passage d'un membre quelconque de la famille à un descendant immédiat, le nombre des côtés diminue d'une unité au moins ; car, si la diagonale employée en apporte, il est vrai, un nouveau, son tracé en enlève deux au moins. La génération indéfinie de nos contours, dérivés chacun d'un ascendant au premier degré, ne peut donc manquer, dans toutes les directions, d'aboutir et de s'arrêter à des contours exclusivement triangulaires. Comme ceux-ci composent visiblement une représentation complète, il suffit de leur appliquer les observations ci-dessus (II, 2°) pour achever la démonstration de notre théorème.

11. I. Aux n^{os} 277* et suiv., 282* et suiv., j'ai donné, au point de vue géométrique et numérique, des définitions maintenant précises, pour l'aire d'un triangle, puis pour une aire polygonale quelconque, quand on sait toutefois celle-ci formée par l'addition géométrique d'aires triangulaires juxtaposées les unes aux autres, toutes extérieurement. La proposition précédente (10) comble les lacunes principales qu'y a laissées la suppression de la démonstration des faits énoncés au n^o 277*, IV, V, toutes même (278*, II), par l'application aussi facile du théorème (10) à des diagonales internes *non essentielles*.

(Pour cette dernière proposition, la substitution à l'internat de chaque contour, de son aire, figure englobant la totalité des points de l'un et de l'autre, ramène son énoncé à ses termes habituels, sinon aussi précis, du moins plus brefs et suffisamment clairs.)

II. Les suppressions rappelées ci-dessus (I) ont affaibli aussi, dans sa base rationnelle, la partie I de la démonstration du théorème du n° 281* sur la somme des angles internes essentiels d'un contour. Cette base est actuellement consolidée par l'observation suivante, à ajouter à celles de l'alinéa II, 2°, du n° 10 : *Dans une représentation complète, la somme de tels angles, faite pour tous ses membres, reproduit celle des angles du même genre dans le contour original.*

III. La considération des angles essentiels d'un contour fournit un autre criterium (cf. 7, VI) pour distinguer ses rives.

En nommant N le nombre de ses côtés (essentiels), π la mesure de l'angle neutre, on sait effectivement, d'après le théorème rappelé à l'instant (II), que $(N - 2) \pi$ mesure la somme des angles internes, $(N + 2) \pi$, par suite, celle des angles externes.

De deux angles biadjacents considérés au hasard, l'interne appartiendra donc à la chaîne de moindre somme, et deux arcs tracés, l'un à l'intérieur de cet angle, l'autre à l'extérieur, signaleront l'internat du contour et son external, respectivement.

12. La notion de *polygone convexe* présente des obscurités assez marquées par la diversité des définitions reçues en cette matière, sans réduction faite encore des unes aux autres. Les moyens employés dans

cette Note permettent de l'éclaircir, et c'est par là qu'elle se terminera.

I. Je partirai des définitions ci-après :

1° Au sommet commun de deux angles biadjacents non neutres, une ligne ouverte (2, 1, 1°, 2°) est *convexe vers l'extérieur* de son angle saillant, *concave vers celui* de son angle rentrant.

2° En un sommet essentiel, un contour est *convexe* (vers son externat), si est interne son angle vers l'extérieur duquel cette qualification lui est applicable dans le sens relatif ci-dessus (1°), en conséquence, si son angle interne est saillant; il est *concave*, si cet angle est rentrant.

3° Il est *convexe*, absolument parlant, quand il est tel en chacun de ses sommets (2°), c'est-à-dire quand tous ses angles internes sont saillants.

II. Quand un contour donné $\mathfrak{A}$ est *convexe* (I, 3°), une droite indéterminée $\mathfrak{D}$ ne l'aborde jamais qu'en un frôlement, ou bien deux traversées, celles-ci consistant en des points.

1° Quand un abord $[qr]$ entre une droite $\mathfrak{D}$ et une ligne quelconque $\mathfrak{L}$ ne se réduit pas à un point, les angles de $\mathfrak{L}$ auxquels sont intérieures ses amorces $[q\mathfrak{p}]$, $[r\mathfrak{s}]$ sur $\mathfrak{D}$ sont tous deux rentrants.

En effet, cet abord se confond avec un côté essentiel de $\mathfrak{L}$ (3, IV, 1°, *in fine*), et l'angle de celle-ci, en q par exemple, dont il s'agit, est la somme de l'angle neutre $rq\mathfrak{p}$ et de l'angle saillant $pq\mathfrak{p}$.

2° Un frôlement entre notre contour et la droite $\mathfrak{D}$ n'est accompagné d'aucun autre abord.

Soient $[qr]$ le frôlement dont l'existence est admise et que nous supposerons d'abord ne pas se réduire à

un point (*Ibid.*), puis $[qp]$, $[rs]$ ses amorces sur $\mathfrak{A}$, puis $\bar{q}q'$, $\bar{r}r'$ les prolongements du segment $[qp]$ au delà de ses extrémités q , p , finalement k , v , si quelque autre abord accompagnait celui-ci, les premiers des points de $\mathfrak{O}$ que feraient rencontrer des marches sur le contour, exécutées, la première à partir de q , dans le sens $qp \dots$, l'autre à partir de r dans le sens $rs \dots$.

En ayant égard au déchevêtrement du contour et à l'identité des demi-plans $\bar{\mathfrak{O}}p$, $\bar{\mathfrak{O}}s$, on apercevra aisément l'impossibilité de l'opposition des demi-droites dans les paires $\bar{q}q'$, $\bar{q}k$ et $\bar{r}r'$, $\bar{r}v$ à la fois, ceci assurant leur identité dans l'une des paires au moins, qui sera la seconde par exemple. Comme ainsi le chemin $rs \dots v$ n'a aucun point commun avec la droite $\mathfrak{O}$ (sauf ses extrémités r , v), il est fermé par le segment $[rv]$ de celle-ci en un contour $\mathfrak{X}$ dont les angles saillants r'_i , v'_i , de notations explicites $vr's$, $rv'u$, sont internes pour lui. Effectivement, les prolongements de leurs côtés autres que $\bar{r}s$, $\bar{v}u$ sont ceux du segment $[rv]$, demi-droites qui n'ont aucun point intérieur commun avec ce contour $\mathfrak{X}$ et sont intérieures aux biadjacents de ces angles, ceci montrant facilement que ces biadjacents sont externes pour lui (7, VI).

Cela posé, r''_e , angle du contour $\mathfrak{A}$ en r , auquel la demi-droite $\bar{r}v$ est intérieure, est externe pour lui, supposé convexe, parce qu'il est rentrant $(1, 3^\circ)$, (1°) . Et, en s , $\dots$, u , les angles internes s'_i , $\dots$, u'_i de $\mathfrak{A}$ sont les biadjacents de s'_i , $\dots$, u'_i , autres angles internes de $\mathfrak{X}$; effectivement, on constatera sans peine que l'enchaînement de ces derniers à r'_i sur $\mathfrak{X}$ entraîne leur enchaînement à r''_e sur $\mathfrak{A}$, leur déchaînement par suite, sur ce même contour, à r''_i biadjacent de r''_e , qui est interne pour lui.

Quand le frôlement en question se réduit à un point, le raisonnement reste le même, sauf attribution des notations $\bar{q}q'$, $\bar{r}r'$ aux moitiés de la droite $\mathbb{D}$ qui sont placées dans les demi-plans $\overline{r\mathfrak{s}p}$, $\overline{q\mathfrak{p}s}$, respectivement.

Soient enfin $N (> 2, \text{visiblement})$ le nombre des sommets de $\mathcal{K}$, $N - 2$, par suite, celui de ses angles internes $\mathfrak{s}'_i, \dots, \mathfrak{u}'_i$ seulement. Si tous ces angles étaient rentrants, leur somme, à eux seuls, serait plus grande que $(N - 2)\mathfrak{K}$, somme de tous les internes de ce contour (II, II). Ceci étant impossible, l'un d'eux au moins, $\mathfrak{s}'_i$ par exemple, serait saillant, et le contour proposé $\mathfrak{A}$ aurait en $\mathfrak{s}$ un angle interne rentrant $\mathfrak{s}''_i$, fait incompatible avec sa convexité supposée.

3° *Toute traversée se réduit à un point.* Car, si elle embrassait la totalité $[qr]$ d'un côté du contour, les angles de celui-ci en q, r auxquels sont intérieures les amorces de cet abord sur $\mathbb{D}$ seraient tous deux rentrants (1°), et, comme ils sont déchainés (3, IV, 2°), l'un d'eux serait interne pour lui, ceci contredisant encore la convexité attribuée au contour (I, 3°).

4° *Les traversées, quand il en existe, sont en nombre = 2, consistant en de simples points (3°) et n'étant accompagnées d'aucun frôlement (2°).*

Comme il y en a plus d'une, parce que le nombre des traversées d'un contour et d'une droite est toujours pair (8), considérons les deux extrêmes, savoir celles qui limitent un segment ayant toutes les autres dans son intérieur, et nommons $\mathfrak{m}$ l'une d'elles, puis $\mathfrak{n}$ la plus rapprochée de celle-ci parmi les autres.

Tous les points intérieurs au segment $[\mathfrak{mn}]$ appartiennent à l'internat de $\mathfrak{A}$, parce que son prolongement au delà de $\mathfrak{m}$ est placé tout entier dans l'externat (*sup.*), et que la demi-droite $\overline{\mathfrak{mn}}$ n'est pas traversée

par le contour à l'intérieur du même segment. On en conclut (9) qu'avec les deux chemins conduisant de m à n sur le contour, des dédoublements du segment dont il s'agit forment de nouveaux contours, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, dont les angles internes sont ceux du proposé, sauf en m , n où ils ne sont que des parties des derniers de tels sommets, angles par là tous saillants. Ces deux contours sont donc convexes aussi, et, comme la droite $\mathfrak{D}$ frôle chacun d'eux en un côté, $[mn]$, elle ne les aborde plus ailleurs (2°). Ses traversées m , n avec le proposé ne sont donc accompagnées d'aucune troisième.

III. 1° Dans le cas (II, 2°), la droite $\mathfrak{D}$ laisse d'un même côté d'elle tous les points du contour étrangers au frôlement $[qr]$, tous ceux de son internat par suite (7, V, 1°).

Soient $[qp]$, $[rs]$ les côtés du contour faisant amorces pour le frôlement, et $p\alpha n \dots s$ sa partie laissée par l'ablation de ces trois côtés $[pq]$, $[qr]$, $[rs]$.

Pour un tel abord, les amorces considérées sont enchaînées (3, IV, 3°), placées ainsi dans un même demi-plan d'arête $\mathfrak{D}$ (*Ibid.*, II, 3°). Le côté $[p\alpha]$ contigu est donc tel, tout entier, parce qu'il en est ainsi pour son extrémité p et qu'il n'aborde pas cette arête (II, 2°). Puis semblablement, pour $[n\alpha]$, $[nm]$, ..., jusqu'à $[rs]$.

2° Dans le cas (II, 4°), nous avons constaté incidemment que la diagonale $[mn]$ (essentielle ou facultative) est toujours tracée dans l'intérieur du contour, et qu'elle découpe celui-ci en deux parties formant avec elle deux autres contours convexes aussi. Cette observation réduit à quelques mots la démonstration du théorème du n° 10, appliqué à un contour convexe.

IV. Quand un contour $\mathfrak{A}$ n'est pas convexe, cas auquel il possède quelque angle interne ren-

trant r_i , chacune des droites qui contiennent les côtés de cet angle l'aborde dans des conditions qui contredisent à la fois les deux parties du dispositif de l'énoncé de l'alinéa II. Et chacune, encore, laisse, de part et d'autre d'elle, quelques points du contour.

1° Soient $[rq]$, $[rs]$ les deux côtés du contour qui se soudent en r . Comme l'angle r_i est rentrant, il contient dans son intérieur la demi-droite opposée à son côté $\bar{r}q$, et, parce qu'il est interne, cette demi-droite présente avec le contour une traversée au moins (7, V). Si donc $[qr]$ est un frôlement, il est accompagné de cet autre abord. S'il est une traversée, celle-ci ne se réduit pas à un seul point.

2° Soient enfin $[ij]$ le second abord de nos lignes, une traversée pouvant se réduire à un point, dont l'existence vient d'être constatée (1°), et $[ih]$, $[jk]$ ses amorces sur $\mathfrak{A}$. Comme les angles de $\mathfrak{Q}$ auxquels celles-ci sont intérieures sont déchainés et consistent en des demi-plans d'arête commune $\mathfrak{Q}$, ces derniers sont mutuellement opposés, ceci plaçant les sommets h , k de part et d'autre de cette droite.

V. Un contour est convexe quand la droite de chaque côté laisse d'un même côté d'elle tous les sommets étrangers à ce côté, ou bien encore, quand les traversées de toute droite se réduisent à deux points.

Car, s'il ne l'était pas, la droite de quelque côté laisserait, de part et d'autre d'elle, deux sommets au moins (IV); en même temps, elle traverserait le contour autrement qu'en deux points (*Ibid.*).

De ces deux propriétés des contours convexes, c'est tantôt l'une qui est prise pour définition, tantôt l'autre, la seconde plus rarement et moins commodément aussi.

Celle dont nous sommes partis semble préférable, soit parce qu'elle est liée bien plus étroitement aux notions vulgaires de convexité, de concavité, soit parce qu'elle est la plus facile à reconnaître.

VI. *Pour tout nombre N de côtés, il existe une infinité de contours convexes.*

S'il en existe un de $N - 1$ côtés, la jonction de deux points m, n , pris arbitrairement dans les intérieurs de deux côtés soudés en un sommet essentiel, conduit visiblement à un triangle et à un contour convexe de N côtés (III, 2°). Or, notre proposition a lieu pour $N = 3$, puisque dans tout triangle les angles internes sont saillants (4, I, 1°).