

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1909)

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 426-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__426_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1909).

Sujets des compositions.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

On donne deux cercles, de centres O et O', de rayons R et R'; ces deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, et l'on mène les tangentes communes extérieures dont les points de contact sont A et A', B et B', ainsi que les tangentes communes intérieures dont les points de contact sont C et C', D et D', les points A et C étant de part et d'autre de la ligne des centres, tandis que le contraire a lieu pour les points A' et C', si l'on a, comme on le suppose, $R < R'$. Les tangentes AA' et CC' se coupent en E, les tangentes BB' et DD' se coupent en F, et la droite EF rencontre la droite OO' au point G; les tangentes AA' et DD' se coupent en I, les tangentes BB' et CC' se coupent en J, et la droite IJ rencontre la droite OO' au point K. On considère les droites AC, BD et A'C', B'D', qui se croisent au point K.

1° Pour que les droites AC et B'D' se confondent en une même droite r, auquel cas les droites BD et A'C' se confondent en une même droite s, il faut et il suffit que les cercles orthoptiques des deux cercles donnés soient orthogonaux, ce qui équivaut à la relation métrique

$$OO'^2 = 2(R^2 - R'^2).$$

(On appelle cercle orthoptique d'un cercle le cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit le cercle donné sous un angle droit.)

Le point G est alors le milieu du segment OO'.

La condition précédente est supposée remplie dans tout ce qui suit.

2° Si R est un point de la droite r ; les polaires de ce point par rapport aux deux cercles O et O' se coupent en un point S situé sur la droite s ;

3° L'enveloppe de la droite RS est une conique, qu'on déterminera par des éléments métriques, et dont on indiquera quelques tangentes remarquables. Le lieu de l'orthocentre P du triangle ORS est une conique, dont on indiquera quelques points remarquables; même question pour le triangle O'RS;

4° Soient RM, RN et RM', RN' les tangentes menées d'un point R de la droite r aux deux cercles O et O'; le plan étant orienté dans le sens ABCD, soient α , β et γ , δ les angles que font avec un axe porté par la droite r des demi-droites portées par ces tangentes et situées d'un même côté de la droite r pour chacun des cercles O et O' (ces angles se retrouvent en O et O'); on pose

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = x, \quad \frac{\beta - \alpha}{2} = u,$$

$$\frac{\gamma + \delta}{2} = y, \quad \frac{\delta - \gamma}{2} = v.$$

Établir les relations suivantes :

$$\cos^2 u = \left(1 + \frac{R'^2}{R^2}\right) \cos^2 x, \quad \cos^2 v = \left(1 + \frac{R^2}{R'^2}\right) \cos^2 y,$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = -\frac{R'^2}{R^2}.$$

Vérifier, au moyen de ces relations, que les tangentes RM, RN et RM', RN' forment un faisceau harmonique.

Le point R de la droite r peut d'ailleurs être remplacé par un point S de la droite s .

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne une parabole (P) et une droite (D) dont les équations, relatives à un système d'axes coordonnés rectangulaires, sont

$$(P) \quad \begin{cases} y^2 - 2px = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases}$$

et l'on considère la surface (S) engendrée par une droite variable (Δ) assujettie à rencontrer (P) en un point A et (D) en un point B, de façon que la distance AB soit une constante l.

1° Construire la projection sur le plan xOy d'une section de la surface par un plan parallèle au plan xOy ; construire la tangente en un point de cette projection et montrer que la courbe obtenue peut être regardée comme le lieu des milieux de cordes parallèles à Ox et limitées, d'une part à une parabole de sommet O et d'axe Ox , d'autre part à une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Ox et Oy .

2° On peut distinguer deux sortes de droites Δ suivant que l'abscisse de A est supérieure ou inférieure à celle de B; séparer sur les sections précédentes les arcs qui correspondent aux génératrices de l'un ou de l'autre système et trouver le lieu des points qui limitent ces arcs.

3° On considère le solide limité par la surface (S) et par les plans $z + a = 0$, $z - 2a = 0$; trouver son volume et construire son contour apparent sur le plan zOx .

4° Déterminer les trajectoires orthogonales des droites (Δ). Par un point A, on peut mener deux droites (Δ), qui rencontrent une trajectoire orthogonale en deux points C et C'; montrer qu'on peut choisir cette trajectoire de façon que la somme $\overline{AC} + \overline{AC'}$ soit proportionnelle à l'abscisse de A.

Peut-on choisir les constantes données de façon qu'une seule trajectoire orthogonale rencontre toutes les droites (Δ) entre leurs points situés sur la parabole (P) et sur la droite (D)?

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Ox , Oy , Oz étant trois axes rectangulaires donnés, on considère une surface S, d'un seul tenant. Soit s une portion quelconque de S, sans point commun avec Oz et n'ayant pas de plan tangent parallèle à Oz .

I. Soient A l'aire de la projection de s sur le plan des xy ; B, le volume limité par l'aire s , sa projection A et le cylindre projetant; C, le volume limité par l'aire s et le cône ayant pour base cette aire et pour sommet l'origine; D, le volume limité par l'aire s et par le conoïde

qui a le contour de s pour directrice, Oz pour axe et xOy pour plan directeur.

Les notations B, C, D représentant les volumes en question affectés de signes convenables, montrer qu'on a

$$(1) \quad 3C = B - 2D$$

tant que l'aire s n'est pas coupée par certaines lignes situées sur S . Montrer également que la formule subsiste même sans cette dernière restriction si l'on prend les éléments de B en grandeur et signe, de manière à avoir toujours

$$B = \int \int z \, dx \, dy$$

(l'intégrale double étant étendue à l'aire A), et qu'en même temps les éléments des volumes C, D soient aussi affectés de signes convenables, dépendant de x, y, z, p, q ($p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$). On énoncera, autant que possible, géométriquement les conventions de signes auxquelles on sera ainsi conduit.

II. Le cône (supposé réduit à une seule de ces nappes) qui limite le volume C détermine, sur le cylindre de révolution de rayon 1 qui a Oz pour axe, une aire algébrique dont les éléments seront affectés des mêmes signes que les éléments correspondants de C , conformément aux conventions précédentes : soit E cette aire.

D'autre part, on fait tourner s autour de Oz et l'on désigne par F le volume de révolution ainsi engendré, par G l'aire de la section méridienne de ce volume, un élément de F ou de G étant également affecté d'un signe (le même dans les deux cas) d'après une convention convenable.

Déterminer la surface S de manière que, pour toute portion s (sans point commun avec Oz ni plan tangent parallèle à Oz) prise sur cette surface, on ait la relation

$$(2) \quad aA + bB + 3cC + eE + \frac{f}{2\pi}F + gG = 0,$$

où a, b, c, e, f, g sont des constantes. Montrer que S doit vérifier une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre dont les coefficients sont des fonctions ra-

tionnelles de x, y, z, ρ , où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (le radical étant pris positivement). Indiquer (en l'énonçant encore géométriquement) la détermination du signe commun à donner à un élément quelconque de F et à l'élément correspondant de G, de manière que cette équation soit la même pour toute la surface considérée.

Trouver les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue, en employant les coordonnées semi-polaires ρ, ω (coordonnées polaires de la projection du point sur le plan xOy), z (cote du point).

Étudier les projections de ces caractéristiques sur le plan xOy . Faire voir qu'il peut exister des caractéristiques qui soient situées sur un cylindre de révolution d'axe Oz , et discuter leur forme.

III. On suppose les constantes b, c liées par la relation

$$(3) \quad b + 3c = 0.$$

On considère l'intégrale curviligne

$$I = \int \left[z \left(c + \frac{e}{\rho^3} \right) - \frac{a}{2} \right] (x dy - y dx) + \rho \left(\frac{e}{2} f + g \right) dz$$

prise d'un point M à un point M' de la surface S, le long d'un chemin L, situé tout entier sur cette surface. Montrer que si S satisfait à la condition qui lui a été imposée dans la Partie II, et si, sous le signe $\int$, le signe du terme en dz a été convenablement choisi, l'intégrale I ne change pas de valeur lorsque, M et M' restant fixes, on déforme d'une manière continue, sur la surface, la ligne L tracée entre ces deux points.

Si, au lieu de la relation (3), les constantes b, c ont entre elles la relation

$$(4) \quad b + 6c = 0,$$

une propriété analogue à la précédente appartient à l'intégrale

$$J = \int z \frac{(c\rho^3 + e)^2}{\rho^3} (x dy - y dx) - \varepsilon g z \frac{c\rho^3 + e}{\rho} (x dx + y dy) \\ + P[\varepsilon f \rho^2 dz - a(x dy - y dx)],$$

où P est un polynome entier en $\wp$ convenablement choisi et z est l'une des deux quantités $+1, -1$.

IV. On suppose en outre que la surface S contient une circonférence dont le plan passe par Oz et qui n'a aucun point commun avec Oz , ni avec le cylindre de révolution précédemment considéré (fin de la Partie II). Sur chacune des caractéristiques issues des différents points de cette circonférence, on prend un arc limité, et cela de manière que la portion Σ de S ainsi délimitée ne contienne aucune singularité.

En supposant donnée la valeur de l'intégrale I [dans le cas de la relation (3)] ou J [dans le cas de la relation (4)] le long d'un certain chemin L joignant M et M' et situé sur Σ , quelles sont les autres valeurs que peut acquérir cette intégrale lorsqu'on remplace L successivement par tous les autres chemins qu'on peut tracer entre les mêmes points sur Σ ?

Indiquer la relation qui doit exister entre le rayon de la circonférence, la distance de son centre à Oz et les coefficients de l'équation (2) pour que la valeur de l'intégrale considérée soit unique dans ces conditions.

MÉCANIQUE.

Un cerf-volant de poids P est soumis à l'action normale du vent, représentée par une force $\frac{\sqrt{3}}{2}P$. Dans sa position d'équilibre, il est incliné à 30° sur l'horizon, il admet un axe de symétrie sur lequel se trouvent son centre de gravité G et le centre O de poussée du vent; O est au-dessus de G et OG égale 4^{cm} .

En un point A de l'axe, placé au-dessous de G , à 40^{cm} de G , est attaché un fil de longueur l ; deux autres fils, de longueur l' , sont attachés en deux points B et C symétriques par rapport à l'axe; la droite BC , égale à $2d$, est au-dessus de G à 29^{cm} de G . Dans la position d'équilibre, ces trois fils, flexibles, inextensibles et sans masse, sont tendus et réunis en un point M , auquel est attachée la ficelle qui retient le cerf-volant.

1° Trouver la relation qui lie l , l' et d ; supposant ces longueurs connues, calculer les tensions des trois fils.

2° Le point M étant à 30^m au-dessus du sol, quelle est la tension à l'autre extrémité E de la ficelle supposée fixée au sol, flexible, inextensible et de poids p par unité de longueur; déterminer p de façon que la tangente en E soit horizontale. (On ne tiendra pas compte de l'action du vent sur la ficelle.)

3° Dans ces conditions, on suppose que la ficelle, prolongée à partir de E, s'enroule immédiatement, avec frottement de coefficient f suivant une hélice tracée sur un cylindre de révolution fixe, dont l'axe est perpendiculaire au plan de la ficelle, le rayon du cylindre étant r et le pas de l'hélice h ; quelle sera la force nécessaire pour maintenir l'équilibre, cette force étant appliquée à la nouvelle extrémité libre de la ficelle supposée enroulée suivant une spire complète (On ne tiendra pas compte du poids de la partie enroulée.)

4° La ficelle qui retient le cerf-volant ayant la forme trouvée précédemment (2°) et étant supposée indéformable, on place à l'extrémité située sur le sol un postillon soumis à une force, résultante du poids du postillon et de l'action du vent; cette force est constante et est dans le plan de la ficelle; quelle condition doit-elle remplir pour que le postillon se mette en mouvement en supposant qu'il y ait frottement de coefficient 1?

Étudier le mouvement du postillon dans le cas où la force est horizontale. (On assimilera ce postillon à un point matériel mobile avec frottement de coefficient 1 sur la courbe matérielle représentée par la ficelle supposée indéformable.)