

ÉMILE TURRIÈRE

**Sur les trajectoires orthogonales de
certaines surfaces et sur les intégrales
homogènes de l'équation de Laplace**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 396-399

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__396_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[060]

**SUR LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES DE CERTAINES
SURFACES ET SUR LES INTÉGRALES HOMOGÈNES DE
L'ÉQUATION DE LAPLACE ⁽¹⁾;**

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les axes coordonnés Ox , Oy , Oz , ce dernier ver-

(¹) J'ai été amené à écrire cette Note, ainsi qu'une Note : *Une*

tical, sont rectangulaires. Les résultats établis (p. 95 des *Nouvelles Annales*, 1909) dans ma Note *Sur certains systèmes orthogonaux du plan et sur les surfaces intégrales de l'équation de Laplace $r + t = 0$* , et concernant les surfaces

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = A r^k \sin k \theta \quad (k \neq 1),$$

peuvent être généralisés. *Pour une surface (V)*

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = A r^k \sin k(\theta - \theta_0) \quad (k \neq 1)$$

(A, k, θ_0 étant des constantes), les projections horizontales des lignes de niveau, des lignes de plus grande pente, des lignes asymptotiques (constituant un réseau orthogonal en projection), sont des spirales sinusoides.

Les expressions données pour H et les déterminants D, D', D'' de Gauss, pour la courbure totale et la torsion des asymptotiques subsistent; dans les résultats, $\theta - \theta_0$ remplace θ .

D'autre part, en comparant à ma Note *Sur la conduction thermique* (*Nouvelles Annales*, 1909, p. 258), on voit que, du théorème de M. Alezais, il résulte que, sur une surface intégrale quelconque de l'équation de Laplace $r + t = 0$, les lignes de plus grande pente sont déterminables sans quadrature.

Dans ces conditions, je considère la famille à un paramètre de surfaces (V) obtenue en supposant A variable. L'équation de ces surfaces est

$$\frac{V(x, y)}{z} = \text{const.}$$

application géométrique de la série considérée par Airy dans la diffraction des ouvertures circulaires, en étudiant des problèmes proposés par M. J. Clairin (préparation à l'Agrégation, Faculté de Lille).

$V(x, y)$ étant l'intégrale homogène la plus générale de l'équation de Laplace.

L'une des équations différentielles des courbes trajectoires orthogonales est précisément l'équation des projections horizontales des lignes de plus grande pente d'une surface intégrale de l'équation de Laplace ; elle s'intègre donc sans signe de quadrature.

En second lieu, puisque V est homogène, les équations différentielles des trajectoires présentent une autre combinaison intégrale

$$d(x^2 + y^2 + m z^2) = 0,$$

m étant le degré d'homogénéité de V . Par suite :

Les courbes trajectoires orthogonales des surfaces (V) sont connues sans signe de quadrature et sont tracées sur des quadriques de révolution.

Les surfaces trajectoires orthogonales des surfaces (V) sont connues sans signe de quadrature.

L'équation de ces surfaces est

$$F(x^2 + y^2 + m z^2, V') = 0;$$

V' désigne la fonction de x, y qu'il faut associer à V dans le symbole $V + iV'$ pour constituer une fonction analytique.

Parmi les surfaces trajectoires orthogonales des surfaces (V) se trouvent une infinité de quadriques de révolution concentriques et homothétiques :

$$x^2 + y^2 + m z^2 = \text{const.}$$

Il est important de signaler, du point de vue de l'intérêt que peuvent présenter les résultats qui précèdent, que les surfaces (V) n'appartiennent point à un système triple-orthogonal.

Un tel système serait en effet constitué par les surfaces (V) et deux familles orthogonales (V_1) , (V_2) de surfaces d'équations respectives

$$(V_1) \quad x^2 + y^2 + m z^2 + 2 f_1(V') = 0,$$

$$(V_2) \quad x^2 + y^2 + m z^2 + 2 f_2(V') = 0,$$

f_1 et f_2 étant des fonctions déterminées de V' contenant chacune un paramètre variable; les équations

$$(1-m)(x^2 + y^2) \quad f_1 = f_2,$$

$$-m(f_1 + f_2) + mV'(f'_1 + f'_2) + f'_1 f'_2 \Delta_1 V' = 0,$$

les f' désignant les dérivées des f , seraient compatibles; par suite, le long de la courbe d'équation

$$V' = \text{const.},$$

$(1-m)(x^2 + y^2)$ et $\Delta_1 V'$ seraient liés par une relation linéaire, ou, en passant aux coordonnées isotropes du plan, $(1-m)u v$ et $u^{m-1} v^{m-1}$ seraient liés par une relation linéaire.

Le cas $m = 1$ n'offrant aucun intérêt, il reste à examiner le cas $m = 2$. Les surfaces (V) sont alors des paraboloides homothétiques par rapport à leur sommet qui ne sauraient, par conséquent, appartenir à un système triple-orthogonal.