

L. ZORETTI

Les questions de sens en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 385-396

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[K et R3a].

LES QUESTIONS DE SENS EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. L. ZORETTI.

On sait de quelle importance est, dans les applications, notamment dans la théorie des vecteurs, la considération du sens d'un trièdre. Cette notion a été introduite avec raison au début même de l'enseignement de la Géométrie. Dans cet enseignement élémentaire il est parfaitement naturel de faire appel à la représentation concrète de ce dont on parle, et alors il n'y a pas grande difficulté à démontrer les propositions dont on a besoin. Mais il n'en est pas moins vrai que la Géométrie, science déductive, doit pouvoir établir tous ces résultats en partant des axiomes et sans jamais faire appel à l'intuition. Je me propose de montrer ici comment cela est possible pour les questions de sens d'angle plan, dièdre ou trièdre. La Géométrie de M. Hadamard donne déjà sur la question un certain nombre d'indications auxquelles il y a bien peu à ajouter.

Postulats. — Je m'appuierai sur les postulats ordinaires de la Géométrie, et notamment sur les deux que j'énonce ci-dessous :

1° Une droite partage un plan en deux régions A, B, telles que deux points de A (ou de B) peuvent toujours être joints (en ligne droite, par exemple) sans traverser la droite, et qu'au contraire toute ligne joignant un point de A à un point de B traverse la droite.

2° Un plan partage l'espace en deux régions A et B jouissant de propriétés analogues aux précédentes.

On démontre alors qu'une droite rencontre un plan en un point; ce point partage la droite en deux régions dont l'une est entièrement dans A, l'autre entièrement dans B.

Considérons maintenant un observateur, mobile de toutes façons dans l'espace autour d'un point fixe O, et essayons de nous rendre compte de l'indétermination de sa position. Nous pouvons d'abord faire coïncider avec une droite $z'Oz$ quelconque une droite fixée à l'observateur et allant de la tête aux pieds, et cela de façon que z' soit du côté des pieds et z du côté de la tête. Alors l'observateur ne peut plus que tourner autour de Oz . Donnons-nous une autre droite $x'x$ passant par O; nous pourrions faire coïncider le plan de symétrie de l'observateur avec le plan zOx , et cela de deux façons différentes. Dans une seule de ces façons, les yeux seront portés du côté de Ox . Alors la position de l'observateur est entièrement déterminée. Si ses bras sont étendus en croix, l'un d'eux est dans l'une et l'autre dans l'autre des deux régions dans lesquelles le plan zOx divise l'espace.

On peut donc dire que tout observateur traîne avec lui un trièdre. Pour éviter d'avoir recours à la vision de l'espace, nous appellerons dans la suite *observateur* un trièdre de repère $Oxyz$ sur les arêtes duquel sont marqués des sens; *plan de symétrie* de l'observateur, le plan zOx ; *devant* la région de l'espace limitée par yOz qui contient Ox ; *droite*, la région limitée par zOx qui contient Oy . La considération de l'observateur est donc maintenant dégagée d'une façon abstraite et, par suite, elle est susceptible d'intervenir dans les raisonnements.

Sens d'un angle dans un plan. — Je vais donner

au sens d'un angle dans un plan deux définitions différentes; je montrerai ensuite qu'elles sont identiques.

Première définition. — Soit AOB un angle dans un plan P. Choisissons arbitrairement une des deux régions de l'espace limitées par P, que nous appellerons le *dessus* du plan. Menons par O la normale au plan et faisons coïncider l'arête Oz du trièdre-observateur avec la portion de cette droite située au-dessus du plan et l'arête Ox avec le premier côté de l'angle, OA. Le plan de symétrie zOx coupe donc le plan P suivant OA; OB se trouve à droite ou à gauche de l'observateur (je veux dire dans la région qui contient Oy ou dans celle qui contient Oy'). Dans l'un des deux cas, le premier, par exemple, nous dirons que l'angle a un sens direct ou positif; dans l'autre, il sera rétrograde ou négatif.

Il nous faut admettre que le déplacement d'un angle dans son plan n'altère pas son sens. C'est un postulat au même titre que l'indéformabilité des figures, je veux dire que l'hypothèse de l'existence de figures égales. On constate, en effet, si l'on essaie de démontrer cette propriété, qu'on est conduit à admettre que le déplacement d'une figure plane dans son plan est *déterminé* (d'une façon unique) quand on connaît le déplacement de deux de ses points. Il me semble plus simple d'admettre la conservation du sens et de démontrer alors la propriété que je viens de rappeler. Mais on reconnaît, en tous cas, qu'il est de toute nécessité de préciser ce point.

Deux angles symétriques par rapport à une droite sont de sens contraires. On le voit en admettant qu'on peut déplacer une figure plane dans son plan, de façon qu'une demi-droite de la figure vienne coïncider avec une demi-droite quelconque du plan. On amènera

donc l'un des angles à avoir son premier côté sur l'axe de symétrie. Pendant ce déplacement dans le plan, l'angle symétrique subit aussi un déplacement dans son plan. Or, les positions finales des deux angles sont de sens contraires, et ces sens n'ont pas été changés.

Comme conséquence, les deux angles AOB et BOA sont de sens contraires comme symétriques par rapport à leur bissectrice (1).

Pour comparer les sens de deux angles, on transportera l'un d'eux dans son plan, de façon à faire coïncider leur premier côté; suivant que les deux seconds côtés seront du même côté ou non par rapport au premier, les angles seront ou non de même sens.

Deuxième définition. — Plaçons l'axe Oz du trièdre suivant OA et le plan de symétrie suivant le plan de l'angle de façon que Ox soit du côté de OB par rapport à OA. Oy sera alors soit dans la région que nous aurons appelée le *dessus du plan*, soit dans l'autre; dans le premier cas, par exemple, l'angle sera dit *direct* ou *positif*; il sera rétrograde dans l'autre.

Il est essentiel de montrer que les deux définitions sont les mêmes, ou plutôt de démontrer que, *si deux angles ont même sens dans l'une des définitions, ils ont même sens dans l'autre*; il n'y aura plus alors

(1) Il n'y a pas de difficulté à définir la bissectrice. On définit l'intérieur de l'angle de la façon suivante : le côté OA prolongé partage le plan en deux régions dont l'une, D, contient OB; de même OB partage le plan en deux régions dont l'une, D', contient OA. L'intérieur est la portion commune à D et D'. Il est facile de voir qu'elle existe (elle contient le segment qui joint deux points, un sur OA, l'autre sur OB) et qu'elle est d'un seul tenant. On définit la somme, la différence de deux angles, un angle plus grand qu'un autre, et pour la bissectrice on invoque la continuité (voir HADAMARD).

qu'à coordonner les deux définitions, mais cela n'a pas d'intérêt théorique.

Nous devons naturellement admettre qu'on peut, sans changer le sens (deuxième définition), déplacer un angle dans son plan, et cela pour les mêmes raisons que plus haut. Rien n'empêche donc de supposer que nos deux angles ont même premier côté. S'ils sont de même sens (première définition), les seconds côtés OB et OC sont du même côté par rapport à OA . Pour définir leur sens (seconde définition), on devra donc faire coïncider les arêtes Oz et les arêtes Ox des deux trièdres : les arêtes Oy coïncideront donc.

De même, on voit que deux angles de même sens (seconde définition) ont même sens (première définition). Il en résulte que deux angles de sens contraire dans l'une des définitions sont aussi de sens contraire dans l'autre. Notamment AOB et BOA sont de sens contraire ⁽¹⁾.

Remarquons que, si un angle se déplace et se déforme dans son plan, son sens ne peut changer que si ses deux côtés se confondent ou viennent en prolongement. On le voit en faisant encore appel à la continuité.

Soit O un point intérieur à un triangle ABC ; les trois angles AOB , BOC , COA ont même sens; pour les deux premiers, on leur donnera, par exemple, OB pour premier côté. Quand O se déplace en restant intérieur au triangle, ces angles conservent un sens constant

(¹) Il semble qu'on pourrait le démontrer directement de la façon suivante : tout angle ayant (première définition) le sens de AOB ou celui de BOA , de deux choses l'une, ou AOB et BOA sont de sens contraire (deuxième définition), ou tous les angles sont de même sens dans cette définition; mais, tandis qu'il est évident dans la première définition qu'il existe des angles ayant les deux sens, cela ne l'est pas dans la seconde, et la conclusion ne s'impose pas.

d'après ce qui précède. Supposons à la limite que O vienne en C ; le premier angle AOB n'a pas changé de sens : il devient ACB ; on en conclut que les trois angles ACB , BAC , CBA ou encore ABC , BCA , CAB ont même sens : c'est le sens du triangle. On définit de même le sens d'un polygone convexe.

Je n'insiste pas sur les conséquences usuelles : angles à côtés parallèles, perpendiculaires ; translations, rotations, etc.

Sens d'un dièdre. — Soit un dièdre ; précisons sa première face P , sa seconde face Q , et choisissons sur l'arête $z'z$ un sens de parcours : de z' vers z , par exemple. Coupons le dièdre $Pz'zQ$ par un plan perpendiculaire à l'arête en un point O ; la demi-droite Oz fera, par hypothèse, connaître le dessus du plan. La section du dièdre est un angle AOB (OA dans P , OB dans Q) dont on peut définir le sens, puisque le dessus du plan a été précisé. Ce sens sera celui du dièdre.

Ce sens est le même quel que soit le point O ; car, si nous nous plaçons dans la première définition, l'arête Oz du trièdre de référence coïncide avec celle du dièdre, Ox coïncide avec OA . Quand on passe du point O à un autre point O' de $z'z$, on fait glisser la figure zOx dans son plan : le demi-plan Q d'une part (et par suite OB), la demi-droite Oy d'autre part, restent donc constamment du même côté du plan zOx . Or, dans la position finale du trièdre, il se trouve convenablement placé pour définir le sens de l'angle $A'O'B'$.

Si l'on change le sens positif sur $z'z$, le sens change : on le voit en prenant la seconde définition du sens. De même, si l'on échange les faces P et Q , le sens change : les deux définitions s'accordent à le montrer. Si l'on change à la fois le sens positif sur l'arête et la première

face, le sens ne change pas : $Pz'zQ$ et $Qzz'P$ sont de même sens.

Soient P' , Q' les demi-plans qui prolongent P et Q . Le dièdre $P'z'zQ'$ est de même sens que $Pz'zQ$, car dans les deux cas on adopte même dessus pour le plan OAB , et deux angles opposés par le sommet sont de même sens (AOB et $A'OB'$ sont tous deux de sens contraire à $A'OB$).

Sens d'un trièdre. — Soit un trièdre $O.ABC$; son sens sera celui du dièdre $A.BO.C$. Soient ABC trois points, un sur chaque arête (et non sur leur prolongement); le sens du dièdre $A.BO.C$ est celui de l'angle ABC dans son plan, en appelant *dessus du plan* la région qui contient le point O .

Dans le plan ABC , les trois angles ABC , BCA , CAB ont même sens; donc il en est de même des trois dièdres

$$A.BO.C, \quad B.CO.A, \quad C.AO.B$$

et des trois trièdres

$$O.ABC, \quad O.BCA, \quad O.CAB.$$

Le sens n'est donc pas altéré par une permutation circulaire des arêtes.

Au contraire, l'échange de deux arêtes change le sens : en effet, à cause de la permutation circulaire, on peut supposer que ces deux arêtes sont les deux dernières, et cela revient à constater que les angles ABC et ACB sont de sens contraire.

Il est très facile *de montrer* que le déplacement conserve le sens d'un trièdre.

Sens relatif de deux vecteurs. — Soient deux vecteurs AB , CD ; leur sens relatif sera celui du trièdre

$$A.BCD.$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut qu'en permutant AB et CD le sens reste le même, c'est-à-dire que les deux trièdres

A.BCD,

C.DAB

aient même sens.

Prenons sur l'arête AC, qui est commune, un point E entre A et C (le milieu), et remarquons que le plan EBD laisse A et C de part et d'autre. Le sens du premier trièdre est celui de l'angle BED (dessus du plan défini par le point A). Pour le second, c'est le sens de l'angle DEB (dessus du plan défini par C). Donc c'est bien le même sens.

Le glissement d'un vecteur sur sa ligne d'action n'altère pas le sens; en effet, si l'on fait glisser AB sur sa ligne d'action, le dièdre C.BA.D reste invariable: le sens positif sur son arête est le même, sa première face est toujours la même.

Supposons qu'on déplace et déforme dans l'espace la figure formée par deux vecteurs AB, CD; la condition nécessaire et suffisante pour que le sens reste invariable, c'est que les quatre points ne soient jamais dans le même plan. Supposons, pour examiner un cas fréquent en pratique, que trois des points restent fixes: on peut toujours supposer que ce sont les trois premiers ABC. Si l'on revient, soit à la définition du sens d'un angle, soit à celle du sens d'un dièdre, on voit que le sens sera invariable tant que D ne traversera pas le plan ABC.

Remarque. — Dans les démonstrations des cas d'égalité des trièdres au moyen des trièdres supplémentaires, on ne fait pas d'ordinaire la remarque que, si les trièdres donnés sont de même sens, il en est de même de leurs suppléments. On doit donc compléter ces

démonstrations ainsi : si les suppléments sont de même sens, ils sont superposables, et alors les trièdres donnés se superposent; donc ils ont même sens; et si les suppléments sont de sens contraire, substituons à l'un son symétrique; ils deviennent de même sens, donc superposables; l'un des trièdres donnés devient superposable au symétrique de l'autre, les trièdres donnés sont donc de sens contraire.

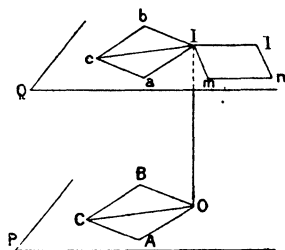
Mais on peut aller plus loin et montrer qu'un trièdre a même sens que son supplément. Soit un trièdre particulier T et son supplément T' . Tout trièdre a , ou bien le sens de T ou le sens opposé. Or, si deux trièdres ont même sens, leurs suppléments ont même sens, car on pourra faire coïncider les premiers en les déformant sans que jamais ils deviennent plans, et les suppléments viennent aussi coïncider dans les mêmes conditions. Donc, ou bien tous les trièdres ont le sens de leur supplément, ou bien tous ont le sens opposé à leur supplément. En prenant pour T un trièdre trirectangle, T' est confondu avec T ; ils ont donc même sens.

Applications aux vecteurs. — Rien n'est plus facile que d'appliquer les considérations précédentes aux théorèmes sur les moments de vecteurs. Abordons, par exemple, le théorème de Varignon en nous bornant au cas de deux vecteurs OA , OB , la droite IO qui joint le centre des moments au point O étant normale au plan AOB (tout se ramène à ce cas : voir la *Mécanique* de M. Guichard).

Soient Il le moment de OA , Ia le vecteur équipollent à OA . Par hypothèse le sens relatif des deux vecteurs Il et OA est positif; il en est donc de même du trièdre $l.OA$ et, par suite aussi, du trièdre $l.Oa$ (trois des points sont restés fixes, le quatrième A a décrit la paral-

lèle Aa au plan OIl). Le trièdre $I.lOa$ a le sens du dièdre $I.OI.a$, c'est-à-dire, en appelant *dessus du plan* Q la région qui ne contient pas O , le sens de l'angle IIa et cet angle est droit. La figure $Ilmn$ est donc déduite de $Iabc$ par une similitude, puisque les angles IIa, mIb, nIc sont droits et de même sens, et

Fig. 1.



puisque les longueurs Ia, Ib, Ic sont proportionnelles à Il, Im, In : c'est le théorème de Varignon.

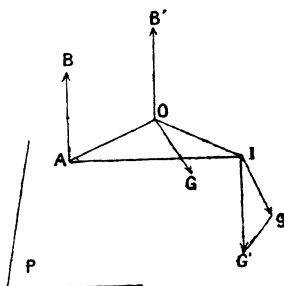
Il est de même facile de démontrer le théorème relatif au changement du centre des moments.

Supposons les deux points par rapport auxquels on prend les moments, O et I , dans un plan P perpendiculaire au vecteur AB au point A . Soient OG le moment par rapport à O , IG' le moment par rapport à I ; ils sont dans le plan P . Menons Ig' équipollent à OG . Tout revient à évaluer la différence géométrique $G'g$ des deux vecteurs Ig' et IG' .

Par définition les deux vecteurs AB et OG ont un sens relatif positif; le trièdre $A.BOG$ est donc positif, donc aussi le trièdre $A.GBO$ qui s'en déduit par deux permutations circulaires; cela revient à dire que le dièdre $G.BA.O$ est positif ou que son rectiligne GAO l'est en adoptant comme dessous du plan P la région qui contient le point B . Dans le triangle GAO , les

angles GAO, AOG sont de même sens; en définitive, l'angle droit AOG est positif. On peut dire aussi bien que l'angle $\widehat{OA, Ig}$ est positif, et de même l'angle $\widehat{IA, IG'}$. Les deux triangles OAI et gIG' dérivent l'un de l'autre par une similitude, car OA et gI d'une part, IA et $G'I$

Fig. 2.



d'autre part, sont proportionnels et font le même angle.

Donc IO et $\text{G}'g$ font aussi ce même angle; l'angle $\widehat{\text{IO}, g\text{G}'}$ est un angle droit positif; or cela exprime que $g\text{G}'$ est équipollent au moment par rapport à I du vecteur OB' équipollent à AB (en tenant compte de ce que $g\text{G}' = \text{OI} \times \text{OB}'$).

C'est bien le théorème connu

$$M_1 AB = M_0 \cdot AB + M_1 OB'.$$

Les deux définitions du moment par rapport à une droite ne présentent aucune difficulté, non plus que les formules des moments par rapport aux axes de coordonnées. Je rappelle que le trièdre des coordonnées doit pour ces formules être de sens positif.

Remarque. — Qu'on me permette, en terminant, une remarque au sujet de la continuité. Les appels à

la continuité, dont il a été question dans cette Note, se réduisent à invoquer quelques théorèmes bien élémentaires et *exacts* relatifs aux fonctions continues.

Si certains esprits se refusent à invoquer la continuité dans les raisonnements géométriques, ils devront réfléchir que la notion de ligne continue est indispensable. Or, ou bien on en fait une notion intuitive et il faut reconnaître qu'elle n'est pas claire; ou bien on veut lui donner une définition à base arithmétique, et des difficultés nombreuses apparaissent; notamment certaines propriétés de la ligne au sens vulgaire du mot cessent d'être exactes ou du moins caractéristiques.

Je remarque encore qu'on pourrait faire la théorie précédente en définissant d'abord directement le sens d'un trièdre, puis le sens d'un angle au moyen du sens d'un trièdre. La constance du sens dans un glissement de plan sur plan pourrait alors se démontrer simplement en admettant, ce qui est peut-être plus simple, que dans ce glissement les régions dessus et dessous ne s'échangent pas.