

G. FONTENÉ

Sur certaines quadratures

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 289-293

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C2j]

SUR CERTAINES QUADRATURES;

PAR M. G. FONTENÉ.

Dans une Note insérée aux *Nouvelles Annales*, (1908, p. 385), j'ai cherché à donner l'historique de diverses formules de cubature. Des remarques de M. d'Ocagne (1909, p. 50) ont ramené mon attention sur ce sujet.

I.

1. La formule dite de Sarrus,

$$(1) \quad V = \frac{h}{6} (B + B' + 4B''),$$

applicable aux volumes des segments à bases parallèles pour lesquels l'aire de la section parallèle aux bases est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant,

$$S = ax^2 + bx + c,$$

est, bien entendu, une simple formule de quadrature; elle donne la valeur d'une intégrale définie dont l'élément différentiel est

$$(ax^2 + bx + c) dx,$$

ou l'aire comprise entre l'axe des x , la parabole du second degré

$$y = ax^2 + bx + c$$

et deux ordonnées déterminées y_0 et y_2 :

$$(1') \quad S = \frac{h}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

2. Dans le *Traité d'Analyse infinitésimale* de MM. Rouché et L'évy, t. II, p. 312, la formule (1) est donnée sous le nom de *règle des trois niveaux* et attribuée à Képler : les auteurs n'indiquent pas l'Ouvrage de Képler où se trouve cette formule.

3. Pour une parabole cubique

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

Newton a donné la formule

$$S = \frac{h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

l'intervalle h étant partagé en trois parties égales.

Cotes, en reproduisant cette formule d'après Newton (*De Methodo differentiali Newtoniana*), observe qu'une formule analogue existe pour une parabole de degré quelconque

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots,$$

l'intervalle h étant partagé en m parties égales; il donne le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & m = 1, \quad S = h \frac{y_0 + y_1}{2}; \\ (\beta) & m = 2, \quad S = h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}; \\ (\gamma) & m = 3, \quad S = h \frac{y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3}{8}; \\ (\delta) & m = 4, \quad S = h \frac{7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4}{90}; \\ \dots & \dots \end{array}$$

4. Catalan a remarqué que la formule (3) s'applique également au cas $m = 3$ (*Nouvelles Annales*, 1857, p. 312). La formule dite de Sarrus est donc

applicable si l'on a

$$S = az^3 + bz^2 + cz + d.$$

Maleyx a étendu la remarque de Catalan : *la formule relative au cas $m = 2n$ est également applicable au cas $m = 2n + 1$* (*Nouvelles Annales*, 1880, p. 543).

M. d'Ocagne a retrouvé ce résultat.

5. Maleyx ne s'est pas borné au cas où l'intervalle h est partagé en parties égales : il s'est proposé d'employer le nombre minimum d'ordonnées, ou plutôt le nombre minimum de sections, car il considère la question du volume.

Pour $m = 2$ il faut au moins deux sections, et Maleyx donne la formule générale

$$V = h \frac{(X + \lambda Y)}{1 + \lambda},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, de part et d'autre de la section moyenne, à des distances du plan de cette section données par les formules :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{1} = \frac{h}{2\sqrt{3\lambda}};$$

il fait en particulier $\lambda = 1$. Si l'on fait $\lambda = 3$, ce qui donne

$$x = \frac{h}{2}, \quad y = \frac{h}{6},$$

X est l'une des bases et l'on obtient la formule qui se trouve dans l'Ouvrage de M. Halsted : *Rational Geometry*, et dont M. Ch. Michel était parti pour retrouver la formule ci-dessus avec λ .

Pour $m = 3$, Maleyx donne une formule générale qui comprend la formule (γ) avec quatre sections, la formule (β) avec trois sections, enfin une formule avec deux sections seulement; cette formule est

$$V = h \frac{X + Y}{2},$$

X et Y étant les aires de deux sections faites par des plans parallèles aux bases, à la distance $\frac{h}{2\sqrt{3}}$ du plan de section moyenne; c'est la formule ci-dessus pour $\lambda = 1$.

6. La formule (1), en ce qui concerne le volume du *prismatoïde*, est due à Mascheroni. M. Haillecourt est peut-être le premier qui ait observé qu'elle s'applique au volume d'un segment à bases parallèles limité latéralement par une surface réglée quelconque : il démontre que l'aire de la section est exprimée par une fonction du second degré de la cote du plan sécant. Il donne l'exemple que j'ai cité à tort comme étant peut-être nouveau (p. 386). La Note de M. Haillecourt a paru, en 1868, dans la *Revue des Sociétés savantes*; une autre Note du même auteur sur le sujet qui nous occupe a paru, en 1876, dans le même recueil.

7. Maclaurin (*Traité des fluxions*, n° 848, 1742) a donné une formule d'approximation,

$$\frac{S}{h} = \frac{y_0 + y_m}{2(m+1)} + \frac{m(y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1})}{m^2 - 1},$$

qui coïncide, pour $m = 2$ et pour $m = 3$, avec les formules (β) et (γ).

La formule de quadrature de Thomas Simpson s'ob-

tient en appliquant la règle des trois niveaux à chaque groupe de trois ordonnées successives.

II.

8. La formule

$$V = B''h + P \frac{h}{3},$$

relative au volume du prismatoïde, appartient à Mascheroni; elle a été retrouvée par M. Koppe.

M. Haillecourt a considéré le cas où les polygones qui limitent les bases polygonales du prismatoïde sont remplacées par deux courbes, le solide étant limité latéralement par une surface *développable*. La lettre P représente donc l'aire enfermée dans une courbe qu'on doit supposer tracée dans un plan parallèle aux plans des deux premières, et qui possède cette propriété : M' et M'' étant deux points correspondants des courbes données, le point correspondant M de la nouvelle courbe est tel que la tangente en M est parallèle aux tangentes en M' et M'' , et que le rayon de courbure en M est égal à la demi-différence des rayons de courbure en M' et M'' .

NOTE. — L'axiome de Cavalieri donne immédiatement ce résultat connu. Lorsqu'une droite glisse sur deux arêtes opposées d'un tétraèdre, en restant dans un plan parallèle à deux autres arêtes opposées, cette droite engendre une surface qui divise le tétraèdre en deux parties équivalentes. Cette remarque est à rapprocher de la formule

$$V = \frac{1}{6} AB \times CD \times \mu.$$
