

ÉMILE TURRIÈRE

Sur la conduction thermique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 258-260

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__258_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[T4c]

SUR LA CONDUCTION THERMIQUE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

Les *Nouvelles Annales* de 1907 ont publié une Note de M. Alezais, dans laquelle l'auteur montre que, P étant la partie réelle et Q le coefficient de l'imaginaire i provenant d'une fonction $f(z)$ à variable complexe

$$f(z) = P + iQ,$$

si l'une des fonctions P, Q est donnée, l'autre en résulte *sans quadrature*. L'auteur applique ensuite ce théorème à diverses questions de licence.

Je signale une propriété importante qui en résulte et qui est relative à l'étude thermique d'un plan indéfini.

Lorsque le potentiel thermique T est donné, les lignes de courant sont déterminables sans quadrature.

En effet, l'équation différentielle des lignes de courant est

$$\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} - K_2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx + \left(\rho \frac{\partial T}{\partial y} + K_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right) dy = 0.$$

Par un changement de variable (transformation homographique), on peut se ramener au cas pour lequel

$$K_1 = K_2 = 1;$$

T satisfait alors à l'équation de Laplace. Soit Θ la fonc-

tion associée à T , *déterminable sans quadrature*, d'après le théorème de M. Alezais.

En tenant compte des relations

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial y},$$

l'équation différentielle devient

$$\left(\rho \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx + \left(\rho \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dy = 0;$$

d'où l'intégrale

$$\rho T + \theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas d'une source punctiforme (en coordonnées polaires)

$$T = -T_0 \log r, \quad \theta = -T_0 \theta,$$

on trouve immédiatement les spirales logarithmiques

$$\rho \log r + \theta = \text{const.}$$

Appliquant au cas de deux sources égales et de signes contraires, on a

$$T = T_0 (\log r_1 - \log r_2), \\ \theta = T_0 (\theta_1 - \theta_2),$$

d'où les lignes de courant ⁽¹⁾.

P.-S. — J'ai reçu une observation relative à mon Mémoire *Sur certains systèmes orthogonaux du plan*. Il s'agit des surfaces considérées par M. Laurent. Cet auteur ne s'était pas préoccupé de l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces. Comme le calcul ressemble à celui qui avait été fait par Jamet, j'ai cru devoir signaler ce dernier calcul. La Note est peut-être

(¹) J'adopte les notations du *Cours de Physique* que publie M. H. Bouasse. C'est donc de préférence à cet Ouvrage que le lecteur devra se reporter : Tome II, *Thermodynamique, Théorie des ions*, au paragraphe 257. Il pourra lire aussi le paragraphe 52 du Tome V (*Électrooptique, ondes hertziennes*).

obscur, mais je n'ai commis aucune erreur : *Étant donnée une intégrale P de l'équation de Laplace, il lui correspond une fonction analytique $f'(z)$ dont le module est la racine carrée de l'invariant différentiel du premier ordre de P.*

En prenant, en effet,

$$f(z) = P + iQ,$$

on a, par dérivation,

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y};$$

d'où

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta_1 P}.$$

Il est, d'ailleurs, possible d'obtenir l'équation très rapidement. Soit z une fonction analytique et soit Z la fonction analytique définie par la relation

$$z = e^Z;$$

on a, par définition,

$$Z = \log |z| + i \arg. z.$$

Des équations

$$\Delta_2 Z = 0, \quad \Delta_2(\arg. z) = 0$$

résulte l'équation des surfaces

$$\Delta_2(\log |z|) = 0.$$
