

R. DE MONTESSUS

De l'usage pratique du théorème de Sturm

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 235-243

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__235_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3d]

DE L'USAGE PRATIQUE DU THÉORÈME DE STURM ;

PAR M. R. DE MONTESSUS.

On dit fréquemment que le théorème de Sturm est, en lui-même, fort beau, mais qu'on ne peut l'utiliser pour les équations de degré supérieur au quatrième. Encore ne s'appliquerait-il à celles-ci que dans le cas où leurs coefficients sont particulièrement simples.

Cela est vrai si l'on adopte le mode de formation usuel des suites de Sturm. Certaines suites, convenablement choisies, permettent cependant d'étendre considérablement, et de façon très élémentaire, la portée pratique du théorème. On le verra par ce qui suit.

Rappelons l'énoncé du théorème de Sturm.

Si, par un procédé quelconque, on a formé une suite de $m + 1$ fonctions continues

$$(S) \quad f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$$

possédant les propriétés suivantes :

I. Deux fonctions consécutives ne s'annulent pas pour une même valeur de l'intervalle Δ , défini par deux nombres réels α, β ($\alpha < \beta$).

II. La fonction $f_m(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de l'intervalle Δ , et conserve par suite un signe constant dans cet intervalle.

III. Lorsqu'une fonction intermédiaire $f_j(x)$ s'annule pour une valeur de l'intervalle, les fonctions voisines $f_{j-1}(x), f_{j+1}(x)$ acquièrent pour cette même valeur de x des signes contraires. .

IV. Lorsque $f(x)$ s'annule pour une valeur de l'intervalle, $f_1(x)$ acquiert le même signe que $f'(x)$.

Cela posé :

Le nombre des racines de l'équation

$$f(x) = 0$$

comprises entre α et β est égal à l'excès du nombre de variations que présente la suite (S) pour $x = \alpha$ sur le nombre de variations qu'elle présente pour $x = \beta$.

L'énoncé est *complet*; il ne comporte *aucune* restriction, sauf celle de continuité, dont il n'y a pas lieu de se préoccuper pour les équations algébriques.

D'ordinaire, on forme comme il suit la suite (S); on prend $f'(x)$ pour $f_1(x)$; puis on effectue sur $f(x), f'(x)$ la suite d'opérations qui a pour effet de former leur plus grand diviseur; $f_2(x)$ est le reste de la divi-

(237)

sion de $f(x)$ par $f'(x)$, $f_3(x)$ est le reste de la division de $f'(x)$ par $f_2(x)$, etc.

C'est ainsi que l'équation

$$f(x) = 0 = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

donne lieu à la suite de Sturm

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \\ f_2(x) &= 11x^4 + 14x^3 - 33x^2 + 31x - 37, \\ f_3(x) &= -1050x^3 + 1683x^2 - 1731x + 597, \\ f_4(x) &= -10200643x^2 - 37927049x + 58788113, \\ f_5(x) &= 2971279748993533x - 3412517994900350020, \\ f_6 &= -\text{environ } 154 \times 10^{41}, \end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned} p f(x) &= (\alpha x + \beta) f'(x) + f_2(x), \\ q f'(x) &= (\gamma x + \delta) f_2(x) + f_3(x), \\ r f_2(x) &= (\epsilon x + \theta) f_3(x) + f_4(x), \\ s f_3(x) &= (\eta x + \xi) f_4(x) + f_5(x), \\ u f_4(x) &= (\pi x + \rho) f_5(x) + f_6(x), \end{aligned}$$

où p, q, r, s, u sont des nombres positifs qu'il nous est indifférent de connaître.

Reprenons la même équation et considérons la suite, *assurément beaucoup plus simple*,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1, \\ \varphi_1(x) &= f'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1, \\ \varphi_2(x) &= x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1, \\ \varphi_3(x) &= 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1, \\ \varphi_4(x) &= 43x^2 + 27x - 39, \\ \varphi_5(x) &= 1551x - 1043, \\ \varphi_6 &= 3363221, \end{aligned}$$

qui donne lieu aux relations

$$\begin{aligned} f(x) + \varphi_1(x) - x(x+1)\varphi_2(x) &= 0, \\ \varphi_1(x) + (2x+1)\varphi_2(x) - x(x+1)\varphi_3(x) &= 0, \\ 5\varphi_2(x) - (6x+5)\varphi_3(x) + x(x-1)\varphi_4(x) &= 0, \\ -713\varphi_3(x) + (313x-152)\varphi_4(x) - 5(x^2-1)\varphi_5(x) &= 0, \\ 1043^2\varphi_4(x) - (32328x+39)\varphi_5(x) + x^2\varphi_6 &= 0. \end{aligned}$$

Il est immédiat que :

Pour $\alpha < \beta < -1$,

$$(\sigma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x), \\ \varphi_1(x), \quad -\varphi_2(x), \quad -\varphi_3(x), \quad -\varphi_4(x), \quad -\varphi_5(x), \quad \varphi_6 \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm, ce qui permet de calculer le nombre de racines réelles comprises entre deux nombres α , β , l'un et l'autre plus petits que -1 ;

Pour $-1 < \alpha < \beta < 0$,

$$(\sigma_2) \quad f(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \varphi_4(x), \quad \varphi_5(x), \quad \varphi_6$$

est une suite de Sturm;

Pour $0 < \alpha < \beta < 1$,

$$(\sigma_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x), \\ \varphi_1(x), \quad -\varphi_2(x), \quad -\varphi_3(x), \quad \varphi_4(x), \quad \varphi_5(x), \quad -\varphi_6 \end{array} \right.$$

est une suite de Sturm;

Pour $1 < \alpha < \beta$,

$$(\sigma_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x), \\ \varphi_1(x), \quad -\varphi_2(x), \quad -\varphi_3(x), \quad -\varphi_4(x), \quad -\varphi_5(x), \quad \varphi_6 \end{array} \right.$$

est encore une suite de Sturm.

Les signes divers employés sont nécessités par la condition III.

Supposons qu'on veuille calculer le nombre de racines réelles comprises entre 0,5 et 7. La suite (σ_3) indiquera combien de racines sont comprises entre 0,5

(239)

et $1 - \varepsilon$, et la suite (σ_i) combien de racines sont comprises entre $1 + \varepsilon$ et γ .

De même, l'équation

$$f(x) = 0 = x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3,$$

traitée par la méthode du plus grand commun diviseur, donne lieu à la suite de Sturm

$$\begin{aligned} f(x), \quad f'(x) &= \varphi_1(x) = 4x^3 - 3x^2 - 30x + 19, \\ \varphi_2(x) &= 123x^2 - 196x + 29, \\ \varphi_3(x) &= 193399x - 137958, \\ \varphi_4 &= 2851068313059, \end{aligned}$$

tandis qu'on peut prendre comme suite de Sturm les polynomes

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3, \\ f'(x) &= \psi_1(x) = 4x^3 - 3x^2 - 30x + 19, \\ \psi_2(x) &= 14x^2 - 59x + 176, \\ \psi_3(x) &= 429x + 2843, \\ \psi_4 &= 2843 \frac{14}{429} + 429 \frac{176}{2843} - 59 > 0, \end{aligned}$$

affectés de signes convenables, que les relations

$$\begin{aligned} 30 f(x) - (11x - 14) \psi_1(x) + (x^2 - 1) \psi_2(x) &= 0, \\ 98 \psi_1(x) - (28x + 97) \psi_2(x) + 5 \psi_3(x) &= 0, \\ \psi_2(x) - \left(\frac{14}{429} x + \frac{176}{2843} \right) \psi_3(x) - x \psi_4 &= 0 \end{aligned}$$

indiqueront.

Voici, expliquée sur l'équation

$$f(x) = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

la manière de former les suites de Sturm employées.

On a

$$f_1(x) = f'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Posons

$$\begin{aligned} F_2(x) &= f(x) + (\lambda x + \rho) f'(x) \\ &= (6\lambda + 1)x^6 + (5\lambda + 6\rho + 1)x^5 \\ &\quad - (4\lambda - 5\rho + 1)x^4 - (3\lambda + 4\rho + 1)x^3 \\ &\quad + (2\lambda - 3\rho + 1)x^2 - (\lambda - 2\rho + 1)x - (\rho - 1). \end{aligned}$$

Si l'on dispose de λ et ρ de manière à annuler les coefficients de x^6 et x^5 , on procède comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur entre $f(x)$ et $f_1(x)$, mode de calcul fort long, on l'a dit ; or, ici,

$$\begin{aligned} F_2(0) &= -(\rho - 1), \\ F_2(1) &= 5\lambda + 5\rho + 1, \\ F_2(-1) &= 3\lambda - 3\rho + 3, \end{aligned}$$

et l'on peut prendre λ, ρ de manière à annuler deux des expressions

$$F_2(0), \quad F_2(1), \quad F_2(-1);$$

le plus simple ici est d'annuler $F_2(-1), F_2(0)$, ce qui donne

$$\rho = 1, \quad \lambda = 0$$

et

$$\begin{aligned} F_2(x) &= f(x) + f'(x) \\ &= x(x+1)(x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1), \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) + f'(x) - x(x+1)f_3(x) = 0,$$

en posant

$$f_3(x) = x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} F_3(x) &= f'(x) + (\mu x + \eta) f_3(x) \\ &= (\mu + 6)x^5 + (6\mu + \eta + 5)x^4 - (2\mu - 6\eta + 4)x^3 \\ &\quad - (3\mu + 2\eta + 3)x^2 + (\mu - 3\eta - 2)x + \eta - 1; \end{aligned}$$

(241)

on a

$$\begin{aligned} F_3(0) &= \eta - 1, \\ F_3(1) &= 3\mu + 3\eta + 5, \\ F_3(-1) &= 3\mu - 3\eta - 3, \end{aligned}$$

et le plus simple est d'annuler encore $F_3(0)$, $F_3(-1)$,
ce qui donne

$$\eta = 1, \quad \mu = 2$$

et

$$\begin{aligned} F_3(x) &= f'(x) + (2x+1)f_2(x) \\ &= x(x+1)(8x^3+10x^2-12x+1); \end{aligned}$$

posant

$$f_3(x) = 8x^3 + 10x^2 - 12x + 1,$$

on aura

$$f'(x) + (2x+1)f_2(x) - x(x+1)f_3(x) = 0;$$

on aurait pu prendre

$$\eta = 1, \quad \mu = 1,$$

ce qui aurait conduit à

$$f'(x) + (2x+1)f_2(x) - x^2 f_3(x) = 0$$

avec

$$f_3(x) = 7x^3 + 12x^2 - 8,$$

résultat un peu plus simple; etc.

On voit qu'une part assez large est laissée à l'arbitraire.

On traiterait de même l'équation

$$x^4 - x^3 - 15x^2 + 19x - 3 = 0.$$

En définitive, *étant donnée une équation de degré m*

$$f(x) = 0,$$

on pose

$$F_2(x) = f(x) + (\alpha x + \beta)f'(x),$$

et l'on détermine α , β :

Soit de manière à annuler les termes de degrés $m, m - 1$ de $F_2(x)$ (méthode du plus grand commun diviseur);

Soit de manière à annuler le terme de degré m de $F_2(x)$ et à mettre en évidence un facteur du premier degré $px + q$ de $F_n(x)$;

Soit de manière à mettre en évidence deux facteurs de premier degré, $hx + k, lx + m$, de $F_2(x)$,

En prenant garde que α, β soient des nombres aussi simples que possible.

Dans le premier cas,

$$f_2(x) = F_2(x), \quad f(x) + (\alpha x + \beta) f'(x) - f_2(x) = 0;$$

dans le second,

$$f_2(x) = \frac{F_2(x)}{px + q},$$

$$f(x) + (\alpha x + \beta) f'(x) - (px + q) f_2(x) = 0;$$

dans le troisième,

$$f_2(x) = \frac{F_2(x)}{(hx + k)(lx + m)},$$

$$f(x) + (\alpha x + \beta) f'(x) - (hx + k)(lx + m) f_2(x) = 0,$$

et, dans les trois cas, $f_2(x)$ est de degré $m - 2$.

On pose ensuite

$$F_3(x) = f'(x) + (\gamma x + \delta) f_2(x)$$

et l'on détermine $f_3(x)$ comme on a déterminé $f_2(x)$, de manière que ce nouveau polynôme soit de degré $m - 3$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme de degré zéro;

$$f(x), \quad f'(x), \quad \pm f_2(x), \quad \pm f_3(x), \quad \dots, \\ \pm f_{m-1}(x), \quad \pm f_m,$$

où les signes sont choisis (voir l'équation étudiée) de

manière à vérifier la condition III des suites de Sturm, *est une suite de Sturm pour l'équation proposée $f(x) = 0$, suite, sauf cas exceptionnels, beaucoup plus simple que la suite formée par le procédé usuel du plus grand commun diviseur.*