

M.-F. EGAN

Note sur une propriété des quadriques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 9
(1909), p. 126-128

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1909_4_9__126_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1909, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'10a]

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DES QUADRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. M.-F. EGAN.

M. Bricard a démontré le théorème suivant ⁽¹⁾ :

Si l'on mène par une tangente variable à une ligne géodésique (ou à une ligne de courbure) d'une quadrique (P) des plans tangents aux diverses quadriques homofocales à (P), ces plans forment un faisceau de grandeur constante.

Ce théorème, comme l'a fait remarquer M. Bricard, fournit une nouvelle interprétation de l'intégrale première de l'équation différentielle que vérifient les lignes géodésiques. L'objet de cette Note est d'indiquer une démonstration de ce théorème qui mettra en évidence ses rapports avec l'interprétation classique de cette intégrale donnée par le théorème de Joachimsthal.

Considérons un système de quadriques homofocales à paramètre λ . Soient λ_1, λ_2 les quadriques du système qui touchent une droite L. Soit α le paramètre de l'une quelconque des quadriques, et soit A l'angle entre le plan tangent à λ_2 qui passe par L et l'un ou l'autre des plans tangents qu'on peut mener par L à α . On trouve sans peine la formule suivante ⁽²⁾ :

$$(1) \quad \lambda_1 \sin^2 A + \lambda_2 \cos^2 A = \alpha.$$

⁽¹⁾ *Nouvelles Annales*, janvier 1908. — *Internacia Scienca Revuo*, janvier 1907.

⁽²⁾ Voir *Nouvelles Annales*, juin 1907, p. 287.

Or, les théorèmes de M. Bricard et de Joachimsthal se déduisent immédiatement de cette formule.

Soit d'abord L une tangente variable à une ligne de courbure ou une ligne géodésique de la quadrique λ_1 . Dans l'un et l'autre cas, la surface λ_2 est donnée; et, par conséquent, si l'on se donne la surface α , les deux valeurs supplémentaires de A sont données aussi; ce qui démontre le théorème de M. Bricard.

Soit, d'autre part, L la *normale* à la quadrique λ_3 en un point variable P d'une ligne géodésique. Alors λ_1 et λ_2 sont les deux autres surfaces du système qui passent par P . Soit α la surface touchée par les tangentes à la ligne géodésique; A sera alors, il est facile de le voir, l'angle entre la tangente en P à la ligne géodésique et l'une des lignes de courbure au même point. Cela posé, la formule (1) exprime précisément le théorème de Joachimsthal, sous la forme que lui a donnée Liouville (1).

La valeur de pD pour les points de la ligne géodésique s'exprime comme il suit en fonction des axes de la quadrique et du paramètre α de la surface touchée par les tangentes de la ligne géodésique.

Mettons $\lambda_3 = 0$, comme on peut évidemment le faire, et soit

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$$

l'équation du système.

Alors on a (voir SALMON, *loc. cit.*)

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 A}{-\lambda_1} + \frac{\sin^2 A}{-\lambda_2},$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{abc},$$

(1) Voir SALMON, *Geometry of three dimensions*, ch. XII.

d'où

$$\rho^2 D^2 = \frac{-abc}{\lambda_2 \cos^2 A + \lambda_1 \sin^2 A},$$

ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$\rho^2 D^2 = \frac{-abc}{\alpha}.$$