

J. HAAG

Déformations conservant la direction des plans tangents

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 83-85

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8_83_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8_83_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O6K]

DÉFORMATIONS CONSERVANT LA DIRECTION DES PLANS TANGENTS ;

PAR M. J. HAAG.

Dans une Note parue en octobre dernier dans les *Nouvelles Annales*, j'ai démontré incidemment qu'on ne peut pas déformer une sphère de telle façon que le plan tangent en chaque point demeure parallèle à lui-même. Il est facile de voir qu'il n'y a que les surfaces minima qui jouissent de cette propriété.

Soient, en effet, deux surfaces S et S_1 applicables l'une sur l'autre, avec correspondance des plans tangents parallèles. Rapportons-les au réseau conjugué commun, en négligeant le cas où ce réseau se réduirait à une famille de lignes asymptotiques, hypothèse qui conduit à deux surfaces égales ou symétriques. On a alors

$$(1) \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \mu \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Écrivons que les deux surfaces sont applicables. On obtient

$$\lambda^2 E = E, \quad \lambda \mu F = F, \quad \mu^2 G = G.$$

Premier cas : $EF \neq 0$. — On a nécessairement

$$\lambda^2 = \lambda \mu = 1, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \mu = \pm 1.$$

Les surfaces S et S_1 sont alors égales ou symétriques.

Deuxième cas : $F = 0$. — On a la nouvelle solution

$$\lambda = 1, \quad \mu = -1.$$

Mais, en éliminant x entre les équations (1), il vient

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0.$$

De même pour y et z . D'où

$$\begin{aligned} x &= U + V, & y &= U_1 + V_1, & z &= U_2 + V_2, \\ x_1 &= U - V, & y_1 &= U_1 - V_1, & z_1 &= U_2 - V_2. \end{aligned}$$

La surface S , par exemple, est une surface de translation par rapport à ses lignes de courbure. On en déduit aisément que c'est un cylindre et que S_1 est un cylindre égal ou symétrique.

Troisième cas : $E = 0$, $G = 0$. — On a l'unique condition

$$\lambda \mu = 1.$$

Mais, dans ce cas, les lignes de longueur nulle sont conjuguées. On a donc deux surfaces minima. Elles sont d'ailleurs associées. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

En combinant ces deux équations avec les équations (1), on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial u} = 0.$$

D'où

$$\lambda = e^{\theta}, \quad \mu = e^{-\theta}, \quad \theta = \text{const.}$$

Si l'on pose alors

$$x = U + V, \quad y = U_1 + V_1, \quad z = U_2 + V_1,$$

on en déduit

$$x_1 = e^{\theta} U + e^{-\theta} V, \quad y_1 = e^{\theta} U_1 + e^{-\theta} V_1, \quad z_1 = e^{\theta} U_2 + e^{-\theta} V_2,$$

formules qui définissent bien une des surfaces minima associées à la surface minima S.

Il resterait le cas de $E = 0$, $F = 0$, qui donnerait des surfaces imaginaires peu intéressantes.

En résumé, *il n'y a que les surfaces minima associées qui répondent à la question que nous nous étions posée.*

Remarquons, en terminant, que ce problème est un cas particulier du problème de Christoffel, qui conduit, comme on sait, aux surfaces minima et aux surfaces isothermiques.