

EGAN

Note sur les courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 500-503

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__500_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O'3k]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

PAR M. EGAN.

Condition pour qu'une courbe donnée soit une hélice. — Pour une hélice sur un cylindre de forme quelconque dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z , on a

$$s = kz,$$

s étant la longueur de la courbe, mesurée à partir du point où elle rencontre le plan $z = 0$.

Pareillement, pour toute hélice, on a

$$s = ax + by + cz + d,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant $\frac{dr}{ds}$ par x_r .

Si x, y, z sont données en fonction d'un paramètre t , on a

$$(2) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & s_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & s_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & s_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie facilement d'ailleurs que

$$\Delta' = - \left(\frac{ds}{dt} \right)^{10} \Delta.$$

Réciproquement, si l'équation $\Delta = 0$ ou $\Delta' = 0$ est vérifiée, la courbe est une hélice. Considérons, en effet, x, y, z comme des fonctions données de t . La forme de l'équation $\Delta' = 0$ nous montre que toute fonction s de t qui lui satisfait doit être comprise sous la forme

$$s = ax + by + cz + d.$$

a, b, c, d étant des constantes. Donc la courbe est une hélice.

Expression géométrique de Δ . — Soient R, T les rayons de courbure et de torsion d'une courbe C à un point donné; ρ, τ les mêmes quantités pour le point correspondant de la courbe γ dont les coordonnées sont

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$. Alors on a, assez facilement,

$$(3) \quad \frac{1}{\rho^2 \tau} = R^6 \Delta.$$

On trouve aussi

$$\begin{aligned} \rho^{-1} &= -T^{-1} \sqrt{R^2 + T^2}, \\ \tau^{-1} &= \frac{-R^3}{R^2 + T^2} \frac{d}{ds} \frac{T}{R}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} R^6 \Delta &= -\frac{R^3}{T^2} \frac{d}{ds} \frac{T}{R} \\ &= R \frac{d}{ds} \frac{R}{T}, \\ \Delta &= R^{-5} \frac{d}{ds} \frac{R}{T}, \end{aligned}$$

ce qui montre, comme on devait s'y attendre, que les conditions

$$\Delta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{R}{T} = \text{const.}$$

s'équivalent.

On peut donner une autre expression pour Δ comme il suit :

On rectifie la courbe C , on le sait, en développant la développable D dont l'élément plan contient la tangente et la binormale au point correspondant de C . Soient P, P' deux points consécutifs sur C , et soit Q le point correspondant à P sur l'arête de rebroussement de D . Soit ψ l'angle entre PP' et PQ . Alors

$$\tan \psi = \frac{T}{R}.$$

L'angle ψ et l'angle PQP' ne sont pas changés par le développement de D . Or, après ce développement, la courbe C devient une droite et l'on a, par conséquent,

$$PQP' = (\psi + d\psi) - \psi = d\psi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} PP' \sin \psi &= PQ \sin PQP' = PQ \, d\psi, \\ (4) \quad PQ \frac{d\psi}{ds} &= \sin \psi. \end{aligned}$$

Soit maintenant p la perpendiculaire abaissée de Q sur PP' ; on a

$$\begin{aligned} 1 &= p \operatorname{cosec}^2 \psi \frac{d\psi}{ds} \\ (5) \quad &= -p \frac{d}{ds} \frac{R}{T}. \end{aligned}$$

On a donc

$$(6) \quad \Delta = \frac{-1}{r^3 p}.$$

Si la développable D se réduit à un cône, on a $p = \text{const.}$ L'équation (5) nous montre donc que les courbes pour lesquelles on trouve

$$\frac{R}{T} = as + b$$

sont des géodésiques sur un cône.