

PHILBERT DU PLESSIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1908. Composition de
géométrie analytique et mécanique**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 360-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__360_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1908.
COMPOSITION DE GEOMETRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.**

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère un plan P et un système (S) de forces appliquées à un solide invariable; ce système, par hypothèse, n'est équivalent ni à une force unique, ni à un couple, ni à zéro.

I. Démontrer sans calcul que le système (S) peut être en général remplacé par deux forces, l'une F_1 normale au plan P, l'autre F_2 située dans ce plan.

Indiquer les conditions de possibilité du problème.

II. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires; X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées du système (S), c'est-à-dire les projections sur les axes de la résultante générale et du moment résultant relatif au point O.

Soit enfin

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan P.

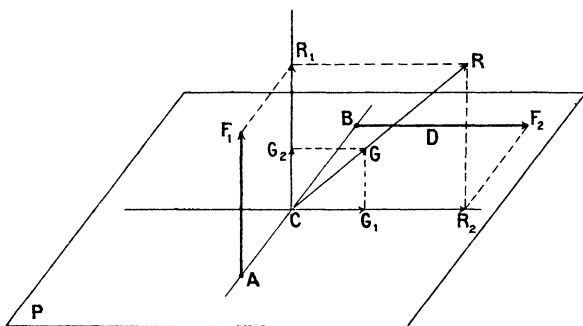
On demande de calculer les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point de rencontre A de la force F_1 avec le plan P, ainsi que l'équation du plan Π mené perpendiculairement au plan P par la droite D qui porte F_2 .

III. On assujettit le plan P à passer par une droite fixe donnée Δ .

Trouver le lieu géométrique [C] du point A, et le lieu géométrique [Σ] de la droite D, quand le plan P pivote autour de la droite donnée Δ .

IV. *Former l'équation réduite de la surface $[\Sigma]$ et discuter la nature de cette surface suivant les positions diverses de la droite donnée Δ .*

I. Les forces F_1 et F_2 cherchées étant équipollentes respectivement aux projections orthogonales de la résul-



tante générale sur la normale au plan P et sur ce plan, il est nécessaire, pour qu'aucune d'elles ne soit nulle, que la direction de cette résultante générale, et par suite l'axe central du système, ne soit ni perpendiculaire ni parallèle au plan P.

Cette condition étant supposée remplie, l'axe central rencontrera le plan P en un point C où l'on pourra faire la réduction. Soient, dès lors, R et G la résultante générale et le moment résultant portés sur cet axe central. Projetons orthogonalement ces deux vecteurs en R_1 et G_2 sur la normale en C au plan P, en R_2 et G_1 sur ce plan, puis transportons les vecteurs R_1 et R_2 parallèlement à eux-mêmes en F_1 et F_2 , leurs points d'application étant amenés sur la perpendiculaire en C au plan RCG₁ (perpendiculaire contenue dans le plan P), en A et en B, de façon que les moments de F_1 et de F_2 par rapport au point C soient respectivement G_1 et G_2 , c'est-à-dire que

$$F_1 = CA \cdot G_1, \quad F_2 = CB \cdot G_2,$$

le sens de CA ou de CB étant tel que, pour l'observateur CG₁ ou CG₂, le sens de F₁ ou de F₂ soit de gauche à droite.

Remarquons que le moment résultant du système par rapport au point A, se réduisant à celui de F₂, est normal au point P, et le moment résultant par rapport à un point quelconque de la droite BF₂ ou D, se réduisant à celui de F₁, est situé dans ce plan.

II. Les composantes du moment résultant en (x, y, z) étant

$$L - yZ + zY, \quad M - zX + xZ, \quad N - xY + yX,$$

on exprime l'orthogonalité de ce moment pris en (x_1, y_1, z_1) et du plan P par les équations

$$(1) \quad \frac{L - y_1 Z + z_1 Y}{u} = \frac{M - z_1 X + x_1 Z}{v} = \frac{N - x_1 Y + y_1 X}{w},$$

auxquelles il faut joindre

$$(2) \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0,$$

puisque le point A est dans le plan P.

La dernière équation (1) peut s'écrire

$$-(vy_1 + wz_1)X + x_1(vY + wZ) + Mw - Nv = 0.$$

En l'ajoutant à l'équation (2) multipliée par X, on a

$$x_1(uX + vY + wZ) + Mw - Nv + hX = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{Nv - Mw - hX}{uX + vY + wZ}, \\ \text{et, par permutation circulaire,} \\ y_1 = \frac{Lw - Nu - hY}{uX + vY + wZ}, \\ z_1 = \frac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + wZ}. \end{array} \right.$$

De même, puisqu'en tout point de D le moment résultant est situé dans P, cette droite appartient au lieu des points où ce moment est parallèle à P, dont l'équation est

$$u(L - yZ + zY) + v(M - zX + xZ) + w(N - xY + yX) = 0$$

ou

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} x(vZ - wY) + y(wX - uZ) \\ \quad + z(uY - vX) + Lu + Mv + Nw = 0. \end{array} \right.$$

Or, on vérifie immédiatement que ce plan est perpendiculaire au plan P, attendu qu'on a identiquement

$$u(vZ - wY) + v(wX - uZ) + w(uY - vX) \equiv 0.$$

Le plan représenté par (4) n'est donc autre que le plan Π de l'énoncé.

III. Si le plan P passe par une droite fixe, on a

$$\begin{aligned} u &= u_1 + \lambda u_2, & v &= v_1 + \lambda v_2, \\ w &= w_1 + \lambda w_2, & h &= h_1 + \lambda h_2, \end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire, et, comme tous les coefficients de (4) sont linéaires en u, v, w , le plan Π passe également par une droite fixe. Si nous posons

$$\begin{aligned} Nv - Mw - hX &= a, \\ Lw - Nu - hY &= b, \\ Mu - Lv - hZ &= c, \\ uX + vY + wZ &= d, \end{aligned}$$

et si nous représentons par a_i, b_i, c_i, d_i ce que deviennent ces quantités quand on y remplace les u, v, w, h par u_i, v_i, w_i, h_i , nous voyons que les coordonnées du point A sont données par

$$\frac{x}{a_1 + \lambda a_2} = \frac{y}{b_1 + \lambda b_2} = \frac{z}{c_1 + \lambda c_2} = \frac{1}{d_1 + \lambda d_2},$$

d'où

$$(5) \quad \frac{d_2 x - a_2}{a_1 d_2 - a_2 d_1} = \frac{d_2 y - b_2}{b_1 d_2 - b_2 d_1} = \frac{d_2 z - c_2}{c_1 d_2 - c_2 d_1},$$

équations d'une droite qui est le lieu [C] du point A.

De même si, représentant par

$$P = 0 \quad \text{et} \quad \Pi = 0$$

les équations des plans P et Π , nous désignons par P_i et Π_i ce que deviennent leurs premiers membres par la même substitution que ci-dessus, nous voyons que, ces équations s'écrivant

$$P_1 + \lambda P_2 = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_1 + \lambda \Pi_2 = 0,$$

le lieu $[\Sigma]$ de leur droite D d'intersection est donné par

$$(6) \quad P_1 \Pi_2 - P_2 \Pi_1 = 0,$$

quadrique réglée dont nous allons discuter la nature, et qui contient d'une part la droite Δ , de l'autre la droite $\Delta' (\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0)$ autour de laquelle pivote le plan Π .

IV. Pour opérer la réduction de l'équation (6), faisons un choix particulier d'axes. Prenons comme axe des z l'axe central du système (S), ce qui revient à faire

$$\begin{aligned} X &= 0, & Y &= 0, & Z &= R, \\ L &= 0, & M &= 0, & N &= G, \end{aligned}$$

et comme axe des x la perpendiculaire commune à cet axe et à la droite Δ dont les équations seront dès lors

$$x = x_0, \quad y = tz,$$

la signification de t étant fournie par

$$t = \tan \omega,$$

si ω est l'angle de Δ avec la direction de Oz . Cela revient à prendre

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, & v_1 &= 0, & w_1 &= 0, & h_1 &= -x_0, \\ u_2 &= 0, & v_2 &= 1, & w_2 &= -t, & h_2 &= 0, \end{aligned}$$

d'où se déduisent

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, & b_1 &= -G, & c_1 &= Rx_0, & d_1 &= 0, \\ a_2 &= G, & b_2 &= 0, & c_2 &= 0, & d_2 &= -Rt. \end{aligned}$$

Les équations (5) deviennent alors

$$(5') \quad \begin{cases} Rtx + G = 0, \\ Rx_0y + Gz = 0, \end{cases}$$

et l'équation (6)

$$(6') \quad R(x^2 + y^2) - Rtyz - (Rx_0 + Gt)x + Gtx_0 = 0.$$

Dans le cas où l'angle ω est droit (Δ orthogonale à l'axe central) et, par suite, t infini, cette équation se réduit à

$$(6'') \quad Ryz + G(x - x_0) = 0.$$

Lorsque t n'est pas infini, l'équation en s de l'équation (6'), préalablement divisée par R , est

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & -\frac{t}{2} \\ 0 & -\frac{t}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(1-s) \left(s^2 - s - \frac{t^2}{4} \right) = 0,$$

dont les racines sont

$$s_1 = 1, \quad s_2 = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{2}, \quad s_3 = \frac{1 - \sqrt{1+t^2}}{2}.$$

On a, d'autre part [avec les notations habituelles (1)],

$$\frac{H}{\Delta} = - \frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2}.$$

Par suite, la forme réduite correspondant à (6') est

$$(7') \quad x'^2 + \frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2} y'^2 - \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{2} z'^2 - \frac{(Rx_0 - Gt)^2}{4R^2} = 0,$$

ou, si l'on se reporte à l'expression ci-dessus de t ,

$$(7'bis) \quad x'^2 \cos \omega + y'^2 \cos^2 \frac{\omega}{\gamma} \\ - z'^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - \frac{(Rx_0 \cos \omega - G \sin \omega)^2}{4R^2 \cos \omega} = 0,$$

équation qui représente un *hyperboloïde à une nappe*, à moins que $\omega = 0$, ou que

$$\text{tang} = \frac{Rx_0}{G},$$

auxquels cas l'hyperboloïde se réduit respectivement à un *cylindre de révolution* ou à un *cône*.

La dernière condition exprime d'ailleurs que la droite Δ' , dont les équations $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ sont ici

$$y' = 0, \\ Rx - Gt = 0,$$

rencontre la droite Δ définie par les équations (5').

Pour l'équation (6''), également divisée par R , l'équation en s est

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 0 \\ 0 & -s & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -s \end{vmatrix} = 0$$

(1) NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 271.

ou

$$s \left(s^2 - \frac{1}{4} \right) = 0,$$

dont les racines sont

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = -\frac{1}{2}.$$

On a d'ailleurs ici ⁽¹⁾

$$\frac{H}{P} = -\frac{G^2}{4R^2},$$

d'où la forme réduite

$$(7'') \quad y'^2 - z'^2 - \frac{2G}{R} x' = 0,$$

représentative d'un *paraboloïde hyperbolique équilatère*.

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES.

Si l'on a recours à la notion du complexe de Chasles (complexe linéaire des axes de moment nul du système) on peut remarquer que, puisque le moment résultant en A est normal au plan P, ce point A est le foyer du plan P. Par suite, lorsque ce plan varie en passant par une droite fixe Δ , le point A décrit la droite conjuguée de Δ . Tel est donc le lieu [C].

Toutes les droites du complexe qui passent par le point I, à l'infini sur le support de F_1 , rencontrent le support D de F_2 . Autrement dit, le plan polaire de I est le plan Π mené par D perpendiculairement au plan P. Or, lorsque le plan P pivote autour de Δ , le point I décrit la droite à l'infini [I] des plans perpendiculaires à Δ . Son plan polaire Π passe, par suite, constamment par la droite Δ' conjuguée de [I].

(1) NIEWENGLOWSKI, *Cours de Géométrie analytique*, t. III, p. 271.

La droite D apparaît donc comme l'intersection de deux plans P et Π rectangulaires, passant chacun par une droite fixe, Δ pour l'un, Δ' pour l'autre. Le lieu $[\Sigma]$ de cette droite est donc l'hyperboloïde de Chasles défini par ces deux droites. Cet hyperboloïde se réduit à un cylindre de révolution si elles sont parallèles et à un cône si elles se rencontrent. Elles ne peuvent d'ailleurs être parallèles que si Δ est parallèle à l'axe du complexe, avec lequel Δ' vient alors coïncider.

Si Δ est orthogonale à l'axe, Δ' est la droite à l'infini du plan mené par cet axe perpendiculairement à Δ , et l'hyperboloïde de Chasles devient un paraboloïde hyperbolique, d'ailleurs équilatère puisque sa génératrice Δ est perpendiculaire au plan directeur contenant Δ' .

NOTE ADDITIONNELLE.

Il n'est pas sans intérêt de montrer comment se pouvait résoudre la Partie II si l'on ne songeait pas à utiliser les remarques énoncées à la fin de la solution de la Partie I ci-dessus, relativement à la direction du moment résultant soit en A, soit en un point courant de D.

Si donc, (x_1, y_1, z_1) étant le point A, (x_2, y_2, z_2) un point courant de D, on représente par X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les composantes des forces F_1 et F_2 , on a immédiatement

$$(1) \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 + h = 0,$$

$$(2) \quad ux_2 + vy_2 + wz_2 + h = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} X = X_1 - X_2, \\ Y = Y_1 + Y_2, \\ Z = Z_1 - Z_2, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} L = y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2, \\ M = z_1 X_1 - x_1 Z_1 + z_2 X_2 - x_2 Z_2, \\ N = x_1 Y_1 - y_1 X_1 + x_2 Y_2 - y_2 X_2, \end{cases}$$

puis, en exprimant que la force F_1 est normale au plan P,

$$(5) \quad \frac{X_1}{u} = \frac{Y_1}{v} = \frac{Z_1}{w},$$

et que la force F_2 est dans ce plan,

$$(6) \quad uX_2 + vY_2 + wZ_2 = 0,$$

soit en tout onze équations pour déterminer les onze inconnues constituées par $x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ et deux des coordonnées x_2, y_2, z_2 , la troisième étant arbitraire puisqu'il s'agit d'un point quelconque de la droite D.

Calculons dès lors x_1, y_1, z_1 .

Des deux premières équations (4) nous déduisons

$$\begin{aligned} Lv - Mu &= Z_1(vY_1 + uX_1) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ &\quad + Z_2(vY_2 + uX_2) - z_2(vY_2 + uX_2) \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1), (2) et (6),

$$\begin{aligned} Lv - Mu &= Z_1(\omega z_1 + h) - z_1(vY_1 + uX_1) \\ &\quad - Z_2(\omega z_2 + h) + z_2\omega Z_2 \\ &= -(uX_1 + vY_1 + \omega Z_1)z_1 - h(Z_1 + Z_2). \end{aligned}$$

Or, des équations (3), eu égard à (6), on tire

$$uX + vY + \omega Z = uX_1 + vY_1 + \omega Z_1.$$

Il vient donc finalement

$$Lv - Mu = -(uX + vY + \omega Z)z_1 - hZ,$$

d'où

$$z_1 = \frac{Mu - Lv - hZ}{uX + vY + \omega Z}.$$

Pour x_1 et y_1 , il suffit de faire une permutation circulaire. On retrouve ainsi les formules ci-dessus.

Passons au plan II. Ce plan, contenant le point (x_2, y_2, z_2) et la force de composantes (X_2, Y_2, Z_2) , et étant perpendiculaire au plan P dont la normale a pour paramètres directeurs (u, v, w) , aura une équation de la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x (\omega Y_2 - \nu Z_2) + y (u Z_2 - \omega X_2) + z (\nu X_2 - u Y_2) \\ - [x_2 (\omega Y_2 - \nu Z_2) + y_2 (u Z_2 - \omega X_2) + z_2 (\nu X_2 - u Y_2)] = 0.$$

Or, si l'on tient compte des équations (5), les équations (3) donnent immédiatement

$$\omega Y_2 - \nu Z_2 = \omega Y - \nu Z, \quad u Z_2 - \omega X_2 = u Z - \omega X, \\ \nu X_2 - u Y_2 = \nu X - u Y,$$

et les équations (4)

$$L u + M \nu + N \omega \\ = x_2 (\omega Y_2 - \nu Z_2) + y_2 (u Z_2 - \omega X_2) + z_2 (\nu X_2 - u Y_2).$$

Il vient, par suite, pour l'équation du plan Π ,

$$x (\nu Z - \omega Y) + y (\omega X - u Z) - z (u Y - \nu X) \\ + L u + M \nu + N \omega = 0.$$

Remarque. — Les équations (5) exprimant que F_1 est normale au plan P n'interviennent pas dans le calcul de x_1, y_1, z_1 . Et, en effet, *le point A est indépendant de la direction de F_1 , pourvu que F_2 soit dans le plan P , attendu que, quelle que soit cette direction, le point A reste toujours celui où le moment résultant est normal au plan P , c'est-à-dire le foyer de ce foyer.*