

G. FONTENÉ

**Sur les modules de la forme P^m, P
premier (impair ou pair)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 8
(1908), p. 193-216

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1908_4_8__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1908, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[17a]

**SUR LES MODULES DE LA FORME p^m , p PREMIER
(IMPAIR OU PAIR);**

PAR M. G. FONTENÉ.

1. La première Partie de ce Mémoire est relative aux modules de la forme p^m , p étant un nombre premier autre que 2; la seconde Partie est relative au module 2^m .

Si on laisse de côté le module 4, qui admet 3 comme racine primitive, on sait que, *pour un module composé M, il n'existe de racines primitives, c'est-à-dire de nombres appartenant à l'exposant $\varphi(M)$, que dans les deux cas suivants :*

$$M = p^m, \quad p \text{ premier et autre que } 2,$$

$$M = 2 \cdot p^m, \quad \text{»} \quad \text{»}$$

Dans le premier cas, qui est le plus intéressant, on a

$$\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1),$$

et il existe des nombres N appartenant à l'exposant

$$p^{m-k} \delta \quad (k \geq 1),$$

δ étant un diviseur de $p-1$; le nombre de ces nombres, supposés inférieurs à p^m , est

$$\varphi(p^{m-k} \delta) \quad \text{ou} \quad \varphi(p^{m-k}) \varphi(\delta),$$

ou encore

$$k < m, \quad p^{m-k-1}(p-1) \varphi(\delta),$$

$$k = m, \quad \varphi(\delta);$$

je me propose de donner de ces nombres, pour chaque valeur de k et chaque valeur de δ , une

expression plus arithmétique que celle qui résulte de l'emploi d'une racine primitive relative au module p^m .

Je dirai ensuite un mot sur le cas du module $2p^m$, pour lequel on a

$$\varphi(2p^m) = \varphi(p^m).$$

Dans la seconde Partie, je considère le module 2^m , $m \geq 3$, pour lequel il n'y a pas de racines primitives. Aux exposants 2^{m-2} , 2^{m-3} , ..., 2, appartiennent des nombres dont le nombre est

$$2\varphi(2^{m-2}), 2\varphi(2^{m-3}), \dots, 2\varphi(2);$$

restent les deux nombres 1 et $2^m - 1$ qui appartiennent respectivement aux exposants 1 et 2.

PREMIÈRE PARTIE.

MODULES DE LA FORME p^m , p ÉTANT IMPAIR.

I.

Nous chercherons d'abord à quel exposant appartient un nombre donné N , relativement au module p^m .

2. Lemme. — *Soit un nombre H , pour lequel on a, avec $h \geq 1$,*

$$\begin{cases} H - 1 = p^h q' & (p \geq 3) \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

on a aussi

$$\begin{cases} H^{p^{m-h}} - 1 = p^m q \\ (q \text{ non multiple de } p). \end{cases}$$

Ces deux faits (l'un positif, l'autre négatif) ayant lieu par hypothèse pour $m = h$, il suffira de montrer

(195)

que, s'ils ont lieu pour une valeur de m , ils ont lieu pour la valeur immédiatement supérieure.

Écrivons

$$H^{p^{m+1}-h} = p^m q + 1,$$

q ne renfermant pas le facteur p , et élevons les deux membres à la puissance p . Comme les coefficients du binôme, pour un exposant premier p , sont multiples de p , sauf le premier et le dernier qui ont la valeur 1 (1), on a

$$\begin{aligned} H^{p^{m+1}-h} &= p^{p^m} q^p \\ &+ p^{(p-1)m+1} q^{p-1} \\ &+ p^{(p-2)m+1} q^{p-2} A \\ &+ \dots \\ &+ p^{2m+1} q^2 L \\ &+ p^{m+1} q \\ &+ 1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$H^{p^{m+1}-h} - 1 = p^{m+1} Q;$$

ainsi le premier membre est divisible par p^{m+1} .

En outre, Q ne renferme pas le facteur p ; on a en effet le diviseur qui donne le quotient, Q étant p^{m+1} ,

$$\begin{aligned} Q &= p^{(p-1)m-1} q^p \\ &+ p^{(p-2)m} q^{p-1} \\ &+ p^{(p-3)m} q^{p-2} A \\ &+ \dots \\ &+ p^m q^2 L \\ &+ q, \end{aligned}$$

(1) Un fait analogue a lieu pour la formule qui donne la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un polynôme, et cela donne une démonstration du théorème de Fermat. (Voir CAHEN, *Éléments de la Théorie des nombres*, p. 66; nous indiquerons les renvois à cet Ouvrage par la notation C, p. 66.)

et la partie qui précède q est multiple de p , même dans le cas le plus défavorable, $p = 3$, où cette partie est

$$p^{2m-1} q^3 + p^m q^2,$$

m étant au moins 1. Comme l'égalité ci-dessus en H n'est pas autre chose que l'égalité primitive avec $m + 1$ au lieu de m , comme de plus le quotient Q a la propriété du quotient q , le fait annoncé est établi.

3. Théorème. — Soit p un nombre premier autre que 2,

$$p \geq 3.$$

Le nombre N étant premier avec p , si δ est l'exposant auquel appartient N (ou son résidu n par rapport à p) pour le module p , et si la plus haute puissance de p qui divise $N^\delta - 1$ est p^h , avec $h \geq 1$, l'exposant auquel appartient N relativement au module p^m est

$$p^{m-h} \delta,$$

tant qu'on a $h \leq m$.

On a, par hypothèse, avec $h \geq 1$,

$$(1) \quad \begin{cases} N^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

on a en outre

$$(2) \quad N^\delta - 1 = \dot{p} \quad (\delta \text{ minimum});$$

la conclusion est, avec $m \geq h$,

$$(3) \quad N^{p^{m-h}\delta} - 1 = p^m q \quad (\text{exposant minimum pour } N).$$

1° D'après (2), les seules puissances de N qui, divisées par p , donnent 1 pour reste, sont celles dont l'exposant est multiple de δ ; l'exposant auquel appartient N , pour le module p^m , est donc d'abord multiple de δ .

2° D'après (1), en appliquant le lemme du n° 2 avec $H = N^\delta$, on a

$$\begin{cases} N^{p^{m-h}\delta} - 1 = p^m q \\ (q \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

l'exposant auquel appartient N , pour le module p^m , est donc $p^{m-h}\delta$, ou un diviseur de ce nombre; comme cet exposant doit être multiple de δ , qui est un diviseur de $p - 1$, il est certainement de la forme $p^{l-h}\delta$, avec $l \leq m$.

Or, avec l'hypothèse (1), on a

$$\begin{cases} N^{p^{l-h}\delta} - 1 = p^l q \\ (q \text{ non multiple de } p); \end{cases}$$

donc le premier membre n'est divisible par p^m que si l'on a $l = m$. Le nombre N appartient donc bien à l'exposant $p^{m-h}\delta$, comme l'indique l'écriture (3).

On peut observer que le quotient q de l'égalité (3) ne renferme plus le facteur p . L'énoncé même du théorème entraîne d'ailleurs cette conséquence; sans quoi N appartiendrait pour le module p^{m+i} à un exposant diviseur de $p^{m-h}\delta$, ce qui est contraire au théorème.

4. **Remarque.** — Si l'on a $h > m$, l'exposant auquel appartient N est simplement δ , puisqu'on a, d'après (1),

$$N^\delta - 1 = p^m \times p^{h-m} q',$$

et que, d'ailleurs, cet exposant doit renfermer le facteur δ ; le quotient $p^{h-m} q'$ renferme alors le facteur p .

(La même chose a déjà lieu pour $h = m$, si ce n'est que le quotient est alors q' non multiple de p .)

II.

Voyons maintenant, ce qui est l'objet principal de ce Mémoire, quels nombres N appartiennent à un exposant donné $p^{m-k}\delta$, k étant au moins 1, et δ étant un diviseur de $p-1$. Pour

$$k = 1, 2, \dots, h, \dots, m-1,$$

on doit chercher les nombres qui satisfont à la fois aux conditions (1) et (2), δ et h étant donnés. Pour $k = m$, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit des nombres N qui appartiennent simplement à l'exposant δ , on aura à tenir compte de la remarque du n° 4.

Nous commencerons par résoudre, et c'est l'objet de ce paragraphe, un problème plus général que celui que nous avons en vue.

§. Problème I. — Résoudre la congruence

$$N^s = \mathfrak{N} + \dot{p}^{h+1},$$

l'exposant s n'étant pas multiple de p ; le point indique un multiple de p^{h+1} .

Supposons connus les $h+1$ derniers chiffres de $\mathfrak{N}$ écrit en base p , et cherchons les $h+1$ derniers chiffres de N écrit de même ⁽¹⁾; on veut avoir

$$\begin{aligned} & (n + ap + bp^2 + \dots + ep^{h-1} + fp^h + \dot{p}^{h+1})^s \\ &= \nu + \alpha p + \beta p^2 + \dots + \varepsilon p^{h-1} + \varphi p^h + \dot{p}^{h+1}; \end{aligned}$$

(¹) Dans le traitement des questions où le module est une puissance de p , on procède de proche en proche à partir du module premier p , en faisant croître d'une unité à chaque fois l'exposant de la puissance (C, p. 99); on comprend dès lors que l'emploi du système de numération à base p doit donner aux démonstrations un tour aisé.

nous supposons $\mathfrak{X}$ non multiple de p , c'est-à-dire

$$\nu \neq 0, \quad \text{d'où} \quad n \neq 0.$$

On doit avoir d'abord

$$n^s = \nu + \dot{p} \quad (n < p);$$

ν doit donc être un reste de puissance $s^{\text{ième}}$ par rapport au module p , et la condition pour qu'il en soit ainsi est celle-ci : δ désignant le plus grand commun diviseur entre s et $p-1$, ν doit être l'une des $\frac{p-1}{\delta}$ solutions de la congruence

$$\nu \frac{p-1}{\delta} = 1 + \dot{p};$$

cette condition remplie, la congruence ci-dessus en n a δ solutions distinctes (C, p. 99). Dans le cas particulier

$$\nu = 1,$$

que nous aurons à considérer, ces δ solutions sont, comme on sait, celles de la congruence

$$n^\delta = 1 + \dot{p} \quad (n < p).$$

La valeur de n étant choisie, on doit avoir en second lieu

$$(n + ap)^s = \nu + \alpha p + \dot{p}^2,$$

ou

$$(n^s - \nu) + s n^{s-1} ap - \alpha p = \dot{p}^2,$$

ou

$$\frac{n^s - \nu}{p} + s n^{s-1} a - \alpha = \dot{p} \quad (\alpha < p);$$

on a supposé s non multiple de p pour que le coefficient de l'inconnue α soit premier avec le module p ,

et la congruence a alors une solution, soit a ⁽¹⁾.

On doit avoir ensuite

$$(n + ap + bp^2)^s = v + \alpha p + \beta p^2 + \dot{p}^3,$$

ou

$$[(n + ap)^s - (v + \alpha p)] + s(n + ap)^{s-1} bp^2 - \beta p^2 = \dot{p}^3,$$

on divise par p^2 , etc. ⁽²⁾.

On continue ainsi de proche en proche.

6. Problème II. — *L'exposant s n'étant pas multiple de p , trouver N d'après les conditions*

$$\begin{cases} N^s - v = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

où v est un reste de puissance $s^{\text{ième}}$ par rapport au module p .

Il faut, dans ce qui précède, faire

$$\begin{cases} \alpha = 0, & \beta = 0, & \dots, & \epsilon = 0 \\ & (\varphi \neq 0). \end{cases}$$

La valeur de n étant choisie, si l'on désigne par a_0 ,

⁽¹⁾ Si s est multiple de p , on a

$$(n + \dot{p})^s = n^s + \dot{p}^2;$$

la congruence à résoudre est impossible ou indéterminée selon qu'on n'a pas ou qu'on a

$$n^s = v + \alpha p + \dot{p}^2.$$

⁽²⁾ Si s est multiple de p , on a

$$(n + ap + \dot{p}^2)^s = (n + ap)^s + \dot{p}^3;$$

la congruence à résoudre est impossible ou indéterminée selon qu'on n'a pas ou qu'on a

$$(n + ap)^s = v + \alpha p + \beta p^2 + \dot{p}^3.$$

$b_0, \dots, e_0, f_0$ les valeurs de $a, b, \dots, e, f$, pour $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon, \varphi$ égaux à zéro, il faut prendre (puisque φ ne doit pas être nul)

$$\left\{ \begin{array}{l} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ (f \neq f_0). \end{array} \right.$$

Le nombre des valeurs de n est δ , le nombre des valeurs de f est $p - 1$; à chacune de ces valeurs de f correspond pour φ l'une des valeurs $1, 2, 3, \dots, p - 1$, dans l'égalité

$$N^s - \nu = p^h (\dot{p} + \varphi).$$

Pour une même valeur de n , les nombres N forment $p - 1$ progressions arithmétiques de raison p^{h+1} .

7. Cas particulier. — *L'exposant s n'étant pas multiple de p , trouver N d'après les conditions*

$$\left\{ \begin{array}{l} N^s - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p). \end{array} \right.$$

Si l'on désigne toujours par δ le plus grand commun diviseur entre s et $p - 1$, les valeurs de N sont celles qui vérifient les conditions plus simples :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} N^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p); \end{array} \right.$$

cela donne

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ (f \neq f_0); \end{array} \right.$$

n est l'une des δ solutions de la congruence

$$n^\delta - 1 = \dot{p},$$

et, lorsque la valeur de n a été choisie, les coeffi-

cients $a_0, b_0, \dots, e_0$ sont absolument déterminés, le nombre des valeurs de f est $p - 1$. En effet, d'une part les valeurs de N qui satisfont aux conditions (1) satisfont aux conditions proposées, et, d'autre part, la réponse au problème primitif est également de la forme (1') avec δ valeurs pour n et $p - 1$ valeurs pour f ; d'ailleurs, en ce qui concerne n , on a déjà rappelé que les congruences

$$n^s - 1 = \dot{p}, \quad n^\delta - 1 = \dot{p}$$

ont les mêmes solutions (congruences à modules premiers).

III.

8. Des nombres qui appartiennent à un exposant donné pour un module donné $p^m, p \geq 3$. — Pour avoir les nombres N qui appartiennent à l'exposant $p^{m-h}\delta$ relativement au module p^m , δ étant un diviseur de $p - 1$, et h ayant l'une des valeurs $1, 2, \dots, m - 1$ (mais non la valeur m que nous écartons pour le moment), il faut prendre les nombres N qui vérifient les conditions suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} N^\delta - 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p) \end{cases}$$

et

$$(2) \quad N^\delta - 1 = \dot{p} \quad (\delta \text{ minimum});$$

on supposera d'ailleurs

$$N < p^m.$$

Le nombre N devant ici appartenir à l'exposant δ pour le module p , il doit en être de même de son résidu n par rapport à p , et l'on doit avoir

$$(2') \quad n^\delta - 1 = \dot{p} \quad (\delta \text{ minimum}).$$

Le nombre des valeurs de n pour la formule (1') est alors seulement $\varphi(\delta)$; comme, dans cette formule,

$$(1') \left\{ \begin{array}{l} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + e_0 p^{h-1} + f p^h + \dot{p}^{h+1} \\ (f \neq f_0), \end{array} \right.$$

le coefficient f a $p - 1$ valeurs, les nombres demandés N forment $(p - 1) \varphi(\delta)$ progressions arithmétiques de raison p^{h+1} , et chacune de ces progressions doit être limitée par la condition $N < p^m$. On peut écrire

$$N = N' + p^{h+1} \times (0, 1, 2, \dots, p^{m-1-h} - 1),$$

avec $N' < p^{h+1}$. Comme on a pour n des valeurs en nombre $\varphi(\delta)$, pour f des valeurs en nombre $p - 1$, pour le multiplicateur de p^{h+1} des valeurs en nombre p^{m-h-1} , le nombre des valeurs de N qu'on obtient est

$$\varphi(\delta) \times (p - 1) \times p^{m-h-1} \quad \text{ou} \quad \varphi(p^{m-h}\delta),$$

comme on le sait par ailleurs.

Pour $h = m - 1$, on arrive à prendre

$$\left\{ \begin{array}{l} N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + r_0 p^{m-2} + s p^{m-1} \\ (s \neq s_0). \end{array} \right.$$

Si l'on prend enfin

$$N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + r_0 p^{m-2} + s_0 p^{m-1},$$

on a

$$N^\delta - 1 = \dot{p}^m,$$

le quotient pouvant renfermer le facteur p , et N appartient à l'exposant δ pour le module p^m . On a pour N des valeurs en nombre $\varphi(\delta)$. On peut dire qu'on a ici $h \geq m$; le quotient de $N^\delta - 1$ par p^m renferme le facteur p à la puissance $h - m$, si h est plus grand que m .

Dans tous les cas, les nombres N (plus petits que p^m) qui appartiennent à l'exposant $p^{m-k}\delta$ pour le module p^m sont en nombre

$$\varphi(p^{m-k}\delta).$$

9. Prenons, par exemple, $p = 7$. Pour des valeurs données de δ et de h , les nombres N qui satisfont aux conditions (1) et (2) forment $6\varphi(\delta)$ progressions arithmétiques illimitées (voir le Tableau de la page 205).

Cela étant, si le module est, par exemple, 7^4 , les nombres de la double colonne qui a pour titre $\delta = 3$ appartiennent successivement aux exposants $7^3 \times 3$, $7^2 \times 3$, 7×3 , et la suite de la colonne ($h \geq 4$) donne une progression unique de nombres appartenant à l'exposant 3. Si l'on se borne aux nombres plus petits que 7^4 , les progressions renferment successivement 7^2 termes, 7 termes, 1 terme, et encore 1 terme; de sorte que, dans la colonne qui correspond à $\delta = 3$, $n = 2$, par exemple, le nombre des éléments est

$$(7^2 + 7 + 1) \times (7 - 1) + 1 \quad \text{ou} \quad 7^3;$$

le nombre total des colonnes étant $7 - 1$, le nombre total des éléments est

$$7^3 \times (7 - 1) \quad \text{ou} \quad \varphi(7^4).$$

10. Pour $\delta = 1$, on veut avoir

$$\begin{cases} N - 1 = p^h q' & (N - 1 = \dot{p}) \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

c'est-à-dire *a priori*

$$N = p^h \times (1, 2, 3, \dots, p - 1) + 1 + \dot{p}^{h+1},$$

avec $f \neq 0$.

$\delta = 1.$	$\delta = 2.$	$\delta = 3.$	$\delta = 6.$
$n = 1.$	$n = 6.$	$n = 2.$	$n = 5.$
	$N = 6 + \dot{\gamma}^2$	$N = 2 + \dot{\gamma}^2$	$N = 5 + \dot{\gamma}^2$
$N = 8 + \gamma^2$	13	9	12
15	20	16	10
22	27	23	17
29	34	25	24
36	41	32	33
43		39	40
		46	47
			45
$h = 1.$			
	$N = 48 + \dot{\gamma}^3$	$N = 30 + \dot{\gamma}^3$	$N = 31 + \dot{\gamma}^3$
$h = 2.$	$N = 50 + \dot{\gamma}^3$	$N = 67 + \dot{\gamma}^3$	$N = 68 + \dot{\gamma}^3$
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...

Pour $\delta = 2$, on veut avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} N^2 - 1 = p^h q' \quad (N + 1 = \dot{p}) \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire *a priori*

$$N = p^h \times (1, 2, 3, \dots, p-1) - 1 + \dot{p}^{h+1},$$

avec $f \neq 0$; cette écriture correspond à $n = -1$, et, si l'on veut conserver $n = p-1$, il faut écrire

$$\begin{aligned} N &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots \\ &\quad + (p-1)p^{h-1} + p^h \times (0, 1, 2, \dots, p-2) + \dot{p}^{h+1}, \end{aligned}$$

avec $f \neq p-1$.

Si l'on suppose, par exemple, $p = 3$, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} N^2 - 1 = 3^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } 3), \end{array} \right.$$

on peut avoir seulement $\delta = 1$, ou $\delta = 2$, ce qui donne d'abord

$$N = \dot{3} + 1$$

ou

$$N = \dot{3} - 1.$$

Pour $h = 1$, on a donc (avec $n = \pm 1$)

$$N = \pm 1 + 3(1, 2) + \dot{9}.$$

Restent les nombres N des deux formes $9\lambda \pm 1$; prenant d'abord λ non multiple de 3, on a

$$N = \pm 1 + 9(1, 2) + \dot{27},$$

et ces nombres correspondent à $h = 2$. Restent les nombres N des deux formes $27\lambda \pm 1$, etc.

11. Remarque générale pour le cas où δ est pair. — Si δ est pair, $\delta = 2d$, les conditions (1) et (2) du n° 8 sont équivalentes à celles-ci :

$$[1] \quad \begin{cases} N^d + 1 = p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

$$[2] \quad N^d + 1 = \dot{p} \quad (d \text{ minimum});$$

en effet, $N^d - 1$ n'est pas divisible par p , de sorte que $N^d + 1$ doit être divisible par p^h .

On a ici $\nu = -1$, et la condition

$$(-1)^{\frac{p-1}{d}} = 1 + \dot{p},$$

qui exprime que -1 est un reste de puissance $d^{\text{ième}}$ par rapport au module p , est naturellement satisfaite, $p-1$ étant multiple de $2d$. La congruence

$$n^d + 1 = \dot{p}$$

donne d valeurs de n , et, parmi ces valeurs, celles pour lesquelles l'exposant d est minimum sont en nombre $\varphi(\delta)$, ou $\varphi(2d)$, c'est-à-dire $2\varphi(d)$ ou $\varphi(d)$ selon que d est pair ou impair. Dans ce dernier cas, par exemple, les solutions de la congruence considérée sont les compléments à p des solutions de la congruence

$$n^d - 1 = \dot{p},$$

et la valeur $\varphi(d)$ est intuitive (*voir* $\delta = 6$ dans le Tableau relatif à $p = 7$); voici un exemple du premier cas :

$$p = 5, \quad \delta = 4, \quad d = 2$$

donnent, avec $\varphi(d) = 1$, $2\varphi(d) = 2$,

$$2^2 + 1 = 5, \quad 3^2 + 1 = 10.$$

On a un lemme analogue à celui qui a été démontré au n° 2, avec $+1$ au lieu de -1 .

Pour le théorème, il faut mettre $+1$ au lieu de -1 dans les hypothèses (1) et (2) et dans la conclusion (3).

Les nombres qui appartiennent à l'exposant $p^{m-h}\delta$ pour le module p^m , lorsque δ est pair, $\delta = 2d$, sont ceux pour lesquels on a

$$N^{p^{m-h}d} + 1 = \dot{p}^m \quad (\text{exposant minimum pour } N);$$

ils sont en nombre

$$\varphi(2d) \times \varphi(p^{m-h}) \quad \text{ou} \quad \varphi(p^{m-h}\delta).$$

12. Restes des puissances des nombres N. — Soit N un nombre qui vérifie les conditions (1) et (2); il appartient, pour le module p^m , à l'exposant $p^{m-h}\delta$, et, dans la suite des restes fournis par la progression

$$1, N, N^2, \dots, N^{\delta-1}, \dots,$$

le diviseur étant p^m , les $p^{m-h}\delta$ premiers restes sont distincts. Soit R un des δ premiers restes. On a

$$R \times N^\delta = R \times (1 + p^h q') = R + \dot{p}^h;$$

il en résulte que *les restes, pris de δ en δ à partir de R, sont les résidus par rapport à p^m des nombres*

$$R + p^h \times (0, 1, 2, 3, \dots, p^{m-h} - 1),$$

en nombre p^{m-h} .

Si δ est pair, $\delta = 2d$, on a

$$R \times N^d = R \times (-1 + p^h q') = -R + \dot{p}^h;$$

les restes, pris de d en d , sont alternativement les résidus par rapport à p^m des nombres des deux groupes

$$\pm R + p^h \times (0, 1, 2, 3, \dots, p^{m-h} - 1).$$

Pour $\delta = 1$, $\delta = 2$, les choses sont particulièrement simples.

IV.

13. Module $2p^m (p \geq 3)$. — Pour le problème I :

$$N^s = \mathfrak{N} + 2\dot{p}^{h+1},$$

il suffira qu'on ait .

$$N^s = \mathfrak{N} + \dot{p}^{h+1},$$

N étant de même parité que $\mathfrak{N}$. Comme on a alors

$$N = (n + ap + bp^2 + \dots + ep^{n-1} + fp^h) + kp^{h+1},$$

on prendra k pair ou impair selon les circonstances.

Pour le problème II :

$$\begin{cases} N^s - v = 2p^h q' \\ (q' \text{ non multiple de } p), \end{cases}$$

on procédera d'une manière analogue.

Relativement aux nombres qui appartiennent à un exposant donné $p^{m-h}\delta$ pour le module $2p^m$, tant que h n'est pas m , on doit prendre

$$N = N' + p^{h+1} \times (1, 3, 5, \dots, 2p^{m-1-h} - 1),$$

si N' est de parité contraire à $\mathfrak{N}$, et

$$N = N' + p^{h+1} \times (0, 2, 4, \dots, 2p^{m-1-h} - 2),$$

si N' est de même parité que $\mathfrak{N}$; le nombre de ces nombres est, dans les deux cas,

$$\varphi(\delta) \times (p-1) \times p^{m-h-1}$$

ou

$$\varphi(p^{m-h}\delta).$$

Pour un exposant δ on prendra

$$N = n + a_0 p + b_0 p^2 + \dots + s_0 p^{m-1} + p^m \times (0 \text{ ou } 1),$$

de façon que N soit de même parité que $\mathfrak{N}$.

DEUXIÈME PARTIE.

MODULE 2^m , $m \geq 3$.

14. Lemme. — *Soit N un nombre impair pour lequel on a*

$$(1) \quad \begin{cases} N-1 = 2^h q' & \text{ou} & N+1 = 2^h q' & (h \geq 2) \\ & & (q' \text{ impair}); \end{cases}$$

on a alors

$$(2) \quad \begin{cases} N^{2^{m-h}} - 1 = 2^m q & (m > h) \\ & (q \text{ impair}). \end{cases}$$

Pour $m = h + 1$, on doit avoir d'abord

$$N^2 - 1 = 2^{h+1} q \quad (q \text{ impair});$$

or, on a, par hypothèse,

$$N = 2^h q' \pm 1 \quad (q' \text{ impair}),$$

d'où

$$N^2 = 2^{2h} q'^2 \pm 2^{h+1} q' + 1,$$

ou

$$N^2 - 1 = 2^{h+1} q' (2^{h-1} q' \pm 1);$$

pour $h \geq 2$, on a bien ce qu'on cherche.

D'autre part, supposons qu'on ait obtenu pour une certaine valeur de m

$$(a) \quad N^{2^{m-h}} = 2^m q + 1 \quad (q \text{ impair});$$

on a, par élévation au carré,

$$N^{2^{m+1-h}} = 2^{2m} q^2 + 2^{m+1} q + 1$$

ou

$$(b) \quad N^{2^{m+1}-h} - 1 = 2^{m+1}q(2^{m-1}q + 1);$$

avec $m > 1$, (b) n'est autre chose que (a) où l'on remplace m par $m + 1$.

Le fait énoncé est donc exact.

15. Théorème. — *Un nombre impair étant mis sous la forme (4), ou encore sous la forme*

$$(6) \quad N = (2^h \pm 1) + 2^{h+1} \quad (h \geq 2),$$

ce qui est toujours possible d'une seule façon, l'exposant auquel appartient ce nombre pour le module 2^m est 2^{m-h} , tant qu'on a $h < m$.

Même démonstration que pour le théorème analogue de la première Partie. *On peut observer que le quotient q de l'égalité (5) est impair.*

Je réunis ici les conditions d'inégalité

$$2 \leq h \leq m - 1.$$

16. Remarque. — Lorsqu'on a $h \geq m$, le nombre N appartient à l'exposant 1 ou à l'exposant 2 selon qu'on a

$$N = 2^h q' + 1 \quad \text{ou} \quad N = 2^h q' - 1.$$

17. Des nombres qui appartiennent à un exposant donné pour le module 2^m , $m \geq 3$. — Le module 2^m étant donné, les nombres de la forme (6), avec $h \leq m - 1$, appartiennent à l'exposant 2^{m-h} , qui prend les valeurs

$$2^{m-2}, \quad 2^{m-3}, \quad \dots, \quad 2^2, \quad 2;$$

pour chaque exposant, ces nombres forment deux pro-

gressions arithmétiques. *Les nombres des deux formes*

$$\dot{2}^m + 1, \quad 2^m - 1$$

appartiennent respectivement aux exposants 1 et 2. Si l'on se borne aux nombres inférieurs à 2^m , les nombres considérés sont en nombre

$$2[\varphi(2^{m-2}) + \varphi(2^{m-3}) + \dots + \varphi(2) + 1],$$

ou 2^{m-1} , ou $\varphi(2^m)$.

Le module étant 16, par exemple, on a pour l'exposant 4 les nombres 3, 11 et 5, 13; pour l'exposant 2 les nombres 7 et 9, et en outre le nombre 15; pour l'exposant 1, le nombre 1.

18. Prenons la formule (6).

1° Pour $h = 2$, on a les nombres des deux formes

$$N = \dot{8} + 5 \quad \text{ou} \quad \dot{8} + 3$$

qui appartiennent à l'exposant 2^{m-2} (quotient du module par 4, ou moitié de l'indicateur du module; pas de racines primitives).

2° Restent les nombres des deux formes $8\lambda \pm 1$. Prenant d'abord λ impair, on a

$$N = \dot{16} + 9 \quad \text{ou} \quad \dot{16} + 7.$$

Or, en faisant $h = 3$ (ce qui suppose $m \geq 4$), on voit que tout nombre de l'une de ces formes appartient à l'exposant 2^{m-3} (quotient du module par 8).

3° Restent les nombres des deux formes $16\lambda \pm 1$. Prenant d'abord λ impair, on a

$$N = \dot{32} + 17 \quad \text{ou} \quad \dot{32} + 15.$$

Or, en faisant $h = 4$ (ce qui suppose $m \geq 5$), on voit

que tout nombre de l'une de ces formes appartient à l'exposant 2^{m-4} .

En continuant ainsi, après avoir fait $h = m - 1$, ce qui donne des nombres appartenant à l'exposant 2, il restera les nombres des deux formes $2^m \lambda \pm 1$, qui appartiennent respectivement aux exposants 1 et 2.

19. Nous donnerons encore, en commençant par les exposants les plus faibles et en nous bornant aux nombres inférieurs à 2^m , le Tableau suivant :

Exposant.	Nombres.
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2^{m-1} \end{Bmatrix}$
2	$(2^{m-1} \pm 1)$
2^2	$(2^{m-2} \pm 1) + 2^{m-1} \times (0, 1)$
2^3	$(2^{m-3} \pm 1) + 2^{m-2} \times (0, 1, 2, 3)$
..	
2^{m-h}	$(2^h \pm 1) + 2^{h+1} \times (0, 1, 2, \dots, 2^{m-h-1} - 1)$
.....	
2^{m-2}	$(2^2 \pm 1) + 2^3 \times (0, 1, 2, \dots, 2^{m-3} - 1)$

Par exemple, avec le module 2^6 ou 64 , on peut former comme il suit le Tableau des nombres autres que 1 et 63, avec l'exposant en indice :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & (31, 33)_2 & & & \\
 & (15, 17)_4 & & (31, 33)_2 & & (47, 49)_4 & \\
 (7, 9)_8 & (15, 17)_4 & (23, 25)_8 & (31, 33)_2 & (39, 41)_4 & (47, 49)_4 & (55, 57)_8
 \end{array}$$

une dernière ligne, non écrite faute de place, commencerait par $(3, 5)_{16}$ et finirait par $(59, 61)_{16}$.

20. Restes des puissances des nombres N. — Pour les nombres de la forme

$$N = (2^h + 1) + 2^{h+1},$$

(214)

lesquels appartiennent à l'exposant 2^{m-h} , les restes des puissances par rapport au module 2^m sont

$$2^h \times (0, 1, 2, \dots, 2^{m-h} - 1) + 1.$$

Soit

$$N^t = 2^m Q + R,$$

$$N^t - 1 = 2^m Q + (R - 1);$$

le premier membre est divisible par $N - 1$, donc par $2^h, \dots$

Pour les nombres de la forme

$$N = (2^h - 1) + 2^{h+1},$$

lesquels appartiennent aussi à l'exposant 2^{m-h} , les restes des puissances par rapport au module 2^m sont, pour les puissances paires de N ,

$$2^{h+1} \times (0, 1, 2, \dots, 2^{m-h-1} - 1) + 1,$$

et pour les puissances impaires

$$2^{h+1} \times (0, 1, 2, \dots, 2^{m-h-1} - 1) + (2^h - 1).$$

Soit

$$N^t = 2^m Q + R,$$

$$N^t - 1 = 2^m Q + (R - 1), \quad N^t + 1 = 2^m Q + (R + 1).$$

Si t est pair, $N^t - 1$ est divisible par $(N + 1)(N - 1)$, donc par $2^{h+1}, \dots$

Si t est impair, $N^t + 1$ est divisible par $N + 1$, donc par 2^h ; le quotient

$$(N^{t-1} - N^{t-2}) + \dots + (N^2 - N) + 1$$

est impair, et l'on a

$$R = 2^h(2q + 1) - 1 = 2^{h+1}q + (2^h - 1);$$

etc.

21. Les derniers chiffres des puissances de 5 écrites en base 10. — Je terminerai par une remarque pour laquelle je me bornerai à un exemple. On a

$$5 - 1 = 2^2 q'$$

et, par suite,

$$5^{2^{m-1}} - 1 = 2^m q;$$

on a donc

$$5^m (5^{2^{m-1}} - 1) = 10^m$$

ou

$$5^{m+2^{m-1}} - 5^m = 10^m.$$

Donc, si l'on écrit les puissances de 5 dans le système de numération dont la base est 10, à partir de $5^m (m \geq 2)$, les m derniers chiffres se reproduisent périodiquement, le nombre des termes de la période étant 2^{m-2} .

Si l'on fait le calcul des puissances successives de 5, on trouve ceci :

1° Ces puissances, à partir de 5^2 , se terminent toutes par 25;

2° A partir de 5^3 , elles se terminent alternativement par 125 et 625;

3° A partir de 5^4 , elles se terminent périodiquement par 0625, 3125, 5625, 8125;

Etc.

22. Modules 4 et 2. — Relativement au module 2, on a supposé $m \geq 3$. Pour le module 2^2 , les impairs étant de l'une des deux formes $4\lambda \pm 1$, ceux qui correspondent au signe + appartiennent à l'exposant 1, ceux qui correspondent au signe - appartiennent à l'exposant 2; on observera que le module composé 4 admet

(216)

la racine primitive 3 :

Puissances.....	1	3	9	...
Restes.....	1	3	1	...

Pour le module 2, tous les impairs appartiennent à l'exposant 1.