

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 7
(1907), p. 91-94

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7_91_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2042.

(1906. p. 336.)

Soient, dans un plan vertical, Ox une droite horizontale, Oy une droite verticale dirigée de haut en bas. Construisons : 1° une cardioïde ayant son point de rebroussement en O et son axe dirigé suivant Ok ; soit A son second point de rencontre avec Ok ; 2° une lemniscate ayant son point double en O , tangente à Ox et Oy et

située dans l'angle xOy et dans l'angle opposé par le sommet.

Un point matériel pesant M est abandonné sans vitesse initiale en A et assujéti à décrire la cardioïde (on fait abstraction des résistances passives de toute nature). Pour chaque position du point M , on construit la bissectrice de l'angle xOM , qui rencontre la lemniscate en deux points. Démontrer que chacun de ces points décrit la lemniscate d'un mouvement uniforme. (R. B.)

SOLUTION

Par M. G. F.

Considérons un point matériel M assujéti à se mouvoir sur la courbe dont l'équation est

$$(C) \quad \rho^n = a^n \cos n\omega;$$

et supposons que ce point est sollicité par une force F , perpendiculaire à l'axe polaire, telle que l'on ait

$$(1) \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2(1-n)} F y.$$

α . La courbe étant d'abord quelconque, divisons membre à membre la relation des forces vives

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = F dy,$$

et la relation (1); nous avons

$$d \cdot \log v^2 = 2(1-n) d \cdot \log y,$$

et, par suite,

$$(2) \quad v = C y^{1-n},$$

$$(3) \quad F = m \times (1-n) C^2 y^{1-2n};$$

il en résulte

$$(4) \quad t = \frac{1}{C} \int_{s_0}^s \frac{ds}{y^{1-n}}.$$

Par la courbe (C), on a

$$\begin{aligned}\rho^{n-1} \cdot d\rho &= -a^n \sin n\omega \, d\omega, \\ \rho^{n-1} \cdot \rho \, d\omega &= a^n \cos n\omega \, d\omega,\end{aligned}$$

d'où, par élévation au carré et addition,

$$\rho^{n-1} \cdot ds = a^n \, d\omega;$$

on a donc

$$(5) \quad t = \frac{a^n}{C} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{1-n}} = \frac{a^n}{C} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sin^{1-n} \omega}.$$

Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, et si l'on remplace C^2 par $2g$, la courbe (C) est une cardioïde placée comme l'indique l'énoncé, et l'on est dans le cas d'un point matériel pesant :

$$\frac{1}{2} m v^2 = F y, \quad v^2 = 2 g y, \quad F = m g;$$

pour $y = 0$, on a bien $v = 0$, comme le demande l'énoncé.

Avec $n > \frac{1}{2}$, les formules (2) et (3), où l'on fait $y = 0$, montrent que le mobile ne peut pas partir du point A qui correspond à la valeur $\omega = 0$; on prendra comme conditions initiales $y = y_0$, $v = v_0$, aucune de ces deux quantités n'étant nulle, et ces conditions déterminant la constante G.

Voici alors l'interprétation exacte de la relation (1) : *le travail de la force entre les positions M_0 et M est une fraction parfaitement déterminée, $\frac{1}{2(1-n)}$, de la différence $Fy - F_0 y_0$, la vitesse v étant de plus infiniment petite, en même temps que l'ordonnée y .*

b. Considérons alors la courbe auxiliaire

$$(C') \quad r^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n}.$$

On a pour la différentielle de l'arc

$$ds' = \frac{b^{\frac{1}{n}} d\theta}{r^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{b \, d\theta}{\left(\sin \frac{\theta}{n}\right)^{1-n}},$$

et, par suite,

$$\frac{s'}{b} = n \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{n}}{\left(\sin \frac{\theta}{n}\right)^{1-n}}.$$

A chaque valeur de ω relative à la courbe (C) faisons correspondre pour la courbe (C') une valeur de θ donnée par la formule

$$(6) \quad \theta = n\omega;$$

nous aurons

$$(7) \quad \frac{s'}{b} = \frac{nC}{a^n} t,$$

de sorte que le mouvement du point M' sur la courbe (C') sera uniforme.

Pour $n = \frac{1}{2}$, la courbe auxiliaire est une lemniscate placée comme l'indique l'énoncé, et l'on a alors $\theta = \frac{\omega}{2}$.

Autres solutions par MM. LAUREAUX, LETIERCE et PARROD.