NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES REMOUNDOS

Sur les rapports anharmoniques généralisés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 7 (1907), p. 77-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__77_1>

[B2a]

SUR LES RAPPORTS ANHARMONIQUES GÉNÉRALISÉS;

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

1. Dans deux articles insérés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹), je me suis occupé d'une généralisation tout à fait naturelle de la notion de rapport anharmonique de quatre quantités; c'était, en effet, un défaut de ne parler que du rapport anharmonique de quatre quantités, en écartant ainsi le cas d'un nombre supérieur de quantités, d'autant plus que les propriétés caractéristiques de ces rapports ne supposent qu'un nombre pair de quantités. Ma généralisation concerne donc le nombre des quantités

(¹) Mai 1904 et août 1905.

données et consiste en ceci : Nous appelons *rapport anharmonique de plusieurs quantités* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}$, *ou rapport hyperanharmonique* une expression de la forme :

$$R = \frac{(y_{k_1} - y_{\lambda_1})(y_{k_2} - y_{\lambda_2}) \ldots (y_{k_n} - y_{\lambda_n})}{(y_{\alpha_1} - y_{\beta_1})(y_{\alpha_2} - y_{\beta_2}) \ldots (y_{\alpha_n} - y_{\beta_n})},$$

les k_i et l_i étant tous différents d'entre eux, ainsi que les α_i et β_i (1).

L'utilité de ces rapports est due à trois propriétés caractéristiques, qui sont pour ainsi dire fonctionnelles et qui s'énoncent comme il suit :

1° Pour qu'ils s'annulent, il faut que deux quantités deviennent égales;

2° Pour qu'ils deviennent infinis, il faut aussi que deux quantités deviennent égales;

3° La substitution homographique

$$y_i = \frac{\alpha\omega_i + \beta}{\gamma\omega_i + \delta}$$

ne les change pas. Au point de vue de la théorie des formes, leur construction présente le caractère suivant : ils sont des *rapports de deux formes plusieurs fois linéaires* (c'est-à-dire à plusieurs séries de variables) d'une certaine classe élémentaire caractérisée par la possibilité d'une décomposition en d'autres formes unilinéaires.

Parmi les trois propriétés citées plus haut, il est remarquable que l'importance caractéristique des deux premières, qui m'a conduit à l'extension des rapports anharmoniques aux cas d'un nombre de quantités

(1) J'ai, dans mon premier article, calculé le nombre des rapports hyperanharmoniques que l'on peut former avec $2n$ quantités données.

supérieur à quatre, m'a été suggérée par la théorie des fonctions ; on s'en rend surtout compte dans quelques applications à la théorie des équations différentielles du premier ordre, avec laquelle paraissent se rattacher d'une façon profonde la théorie des rapports anharmoniques et ses généralisations (*voir* mon premier article des *Nouvelles Annales*, mai 1904 : *Sur une extension de la notion des rapports anharmoniques et les équations différentielles du premier ordre*) et mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journ. de Math.* de M. Jordan, 1906, fasc. I).

2. Dans mon second article des *Nouvelles Annales* (août 1905), j'ai fait l'assertion que les rapports hyperanharmoniques ne sont pas tous des produits de rapports anharmoniques : pour préciser, j'ajoute ici que cette assertion est exacte si l'on exige l'emploi de rapports anharmoniques n'ayant aucun élément commun ; dans le cas contraire, il est toujours possible d'exprimer les rapports hyperanharmoniques comme produits de rapports anharmoniques : c'est ce que je me propose de démontrer dans la suite.

Considérons, par exemple, le rapport hyperanharmonique des six quantités :

$$R = \frac{(1\,2)(3\,4)(5\,6)}{(1\,3)(4\,5)(2\,6)},$$

en posant pour abréger

$$y_i - y_k = (ik).$$

On a

$$R = \frac{(1\,2)(3\,4)}{(1\,3)(2\,4)}\,\frac{(2\,4)(5\,6)}{(4\,5)(2\,6)} = (1\,2\,3\,4)(2\,4\,5\,6).$$

La notation (1 2 3 4) désigne un rapport anharmonique des quantités y_1, y_2, y_3, y_4.

Je démontrerai maintenant que cela est une propriété générale de tout rapport hyperanharmonique; à cet effet, je prouverai que tout rapport hyperanharmonique de $2n$ quantités peut se mettre sous la forme d'un produit d'un rapport anharmonique et d'un rapport hyperanharmonique (ou anharmonique) de $2n-2$ quantités et, en général, d'un nombre inférieur de quantités.

Considérons le rapport suivant de $2n$ quantités :

$$R_{2n} = \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_{k_2}-y_{\lambda_2})\ldots(y_{k_n}-y_{\lambda_n})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_{\alpha_2}-y_{\beta_2})\ldots(y_{\alpha_n}-y_{\beta_n})} = \frac{y_{k_1}-y_{\lambda_1}}{y_{\alpha_1}-y_{\beta_1}} Q_{2n-2},$$

k_1 étant, par suite d'un choix convenable, égal à α_1, ce qui est toujours possible, puisque l'indice k_1 doit figurer aussi dans le dénominateur; le deuxième facteur est un rapport qui n'est pas hyperanharmonique ou anharmonique, puisque la quantité y_{λ_1} ne figure pas dans le numérateur de Q_{2n-2} et y_{β_1} ne figure pas dans le dénominateur de Q_{2n-2}. On a évidemment $\lambda_1 \neq \beta_1$, puisque, autrement, le rapport donné ne dépendrait que de $2n-2$ quantités; soit [1] $y_\rho - y_{\lambda_1}$ le facteur de Q_{2n-2} qui contient y_{λ_1} et $y_\sigma - y_{\beta_1}$ le facteur de Q_{2n-2} (dans le numérateur), qui contient y_{β_1} et mettons

$$Q_{2n-2} = \frac{y_\sigma - y_{\beta_1}}{y_\rho - y_{\lambda_1}} Q_{2n-4}.$$

On aura

$$(1) \qquad R_{2n} = \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_\sigma - y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_\rho - y_{\lambda_1})} Q_{2n-4}.$$

---

[1] Il est clair que ce facteur ne peut pas coïncider avec le premier $y_{\alpha_1}-y_{\beta_1}$, puisque, autrement, l'on aurait : $\lambda_1 = \beta_1$ et $\rho = \alpha_1$; ce facteur serait commun au numérateur et au dénominateur, et notre rapport ne dépendrait que de $2n-2$ quantités.

Pour aller plus loin, il faut faire attention sur les inégalités suivantes :

$$\begin{gathered} \rho \neq \lambda_1, \qquad \rho \neq k_1, \qquad \rho \neq \alpha_1, \qquad \rho \neq \beta_1, \\ \sigma \neq \beta_1, \qquad \sigma \neq \alpha_1, \qquad \sigma \neq \lambda_1, \end{gathered}$$

qui sont évidentes; il en résulte que ρ doit exister dans le numérateur de Q_{2n-4} et σ dans le dénominateur de Q_{2n-4} ; d'autre part, les éléments y_{k_1}, y_{λ_1} et y_{β_1} ne figureront pas dans Q_{2n-4}, parce qu'ils figurent dans les deux termes de la fraction

$$(2) \qquad \frac{(y_{k_1} - y_{\lambda_1})(y_\sigma - y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1} - y_{\beta_1})(y_\rho - y_{\lambda_1})} \qquad (k_1 = \alpha_1);$$

en outre, les éléments qui ne figurent pas dans cette fraction figurent dans la fraction Q_{2n-4} d'une façon anharmonique (j'entends par là qu'ils figurent en numérateur et en dénominateur linéairement).

Cela bien compris, écrivons la formule (1) sous la forme suivante :

$$(3) \qquad R_{2n} = \frac{(y_{k_1} - y_{\lambda_1})(y_\sigma - y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1} - y_{\beta_1})(y_\sigma - y_{\lambda_1})} \, \frac{(y_\sigma - y_{\lambda_1})}{(y_\rho - y_{\lambda_1})} Q_{2n-4}, \qquad (k_1 = \alpha_1).$$

Dans le cas où $\rho = \sigma$, cette transformation est inutile, puisque la fraction (2) serait bien un rapport anharmonique des quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_{β_1} et y_σ et Q_{2n-4} serait un rapport hyperanharmonique ou anharmonique de $2n-4$ quantités (les quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_σ et y_{β_1} y manqueront totalement). Dans ce cas, donc, *le rapport hyperanharmonique donné est décomposé en un rapport anharmonique et un autre hyperanharmonique ou anharmonique de $2n-4$ quantités; ces deux rapports n'ont aucun élément commun.*

Posons-nous maintenant dans le cas $\rho \neq \sigma$ et remarquons que la première fraction du second membre de la formule (3) est bien un rapport anharmonique des quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_{θ_1} et y_σ et le second facteur $\frac{y_\sigma - y_{\lambda_1}}{y_\rho - y_{\lambda_1}} Q_{2n-4}$ est un rapport hyperanharmonique ou anharmonique de $2n - 2$ quantités (ce sont les quantités y_{k_1} et y_{θ_1} qui y manquent); ces deux rapports auxquels se décompose R_{2n} ont deux éléments communs y_{λ_1} et y_σ. On a donc

$$R_{2n} = R_4 R_{2n-2},$$

R_4 désignant un rapport anharmonique. On en déduit immédiatement le théorème suivant : *Tout rapport hyperanharmonique est égal à un produit de rapports anharmoniques.*

3. La réciproque n'est pas vraie : un produit de rapports anharmoniques n'est pas toujours un rapport hyperanharmonique, parce qu'il est possible que ce produit soit égal à une fraction à termes non linéaires par rapport à chacune des quantités y_i. De même, une fonction de plusieurs rapports anharmoniques ayant ou non des éléments communs n'est pas toujours un rapport anharmonique ou hyperanharmonique, puisque la seule propriété qui subsiste toujours est la troisième, d'après laquelle ils sont invariants par la substitution homographique.

On peut aussi démontrer que les seules fonctions de rapports anharmoniques, linéaires ([1]) par rapport à toutes les quantités (à chacune séparément), qui

([1]) Ou plutôt quotients de deux fonctions entières linéaires; on pourrait dire aussi : *homographiques par rapport à chacune des quantités.*

jouissent des deux premières propriétés citées plus haut (n° 1), sont les rapports hyperanharmoniques. Considérons, en effet, une fonction $f(y_1 y_2 y_3 \ldots y_{2n})$, quotient de fonctions linéaires par rapport à chacune des quantités y_i et ne dépendant que de rapports anharmoniques, et supposons qu'elle jouisse de la propriété suivante : *Pour qu'elle s'annule ou devienne infinie, il faut que deux quantités y_i soient égales.*

La fonction $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})$ sera d'abord homogène par rapport aux quantités $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ et de degré zéro, parce qu'il en est ainsi de chacun des rapports anharmoniques, soit :

$$f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}) = \frac{f_1(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})}{f_2(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})};$$

il est clair que les quantités y_i doivent figurer dans les deux termes (tous les deux); autrement, la propriété ci-dessus posée ne serait pas vérifiée ; si, par exemple, y_1 n'existait que dans le numérateur, la fonction donnée f deviendrait infinie pour $y_1 = \infty$, quelles que soient les autres quantités.

Envisageons à part le numérateur $f_1(y_1 y_2 y_3 \ldots y_{2n})$ qui est de la forme :

$$f_1 = \mathrm{A}_1(y_2 y_3 \ldots y_{2n})(y_1 - y_{\gamma_1}),$$

y_{γ_1} étant une des autres quantités y_i $(i = 2, 3, \ldots, 2n)$ et la fonction A_1 ne contenant ni y_1 ni y_{γ_1}; de même, l'on aura

$$\mathrm{A}_1 = (y_2 - y_{\gamma_2})\,\mathrm{A}_2,$$

y_{γ_2} étant différent de y_1, y_2 et y_{γ_1} et A_2 ne contenant ni y_2 ni y_{γ_2}; nous continuons de la même façon et nous arrivons à la conclusion que le numérateur f_1 sera de la forme

$$f_1 = c_1(y_1 - y_{\gamma_1})(y_2 - y_{\gamma_2})\ldots(y_n - y_{\gamma_n}).$$

On aura de même

$$f_2 = c_2(y_1 - y_{\delta_1})(y_2 - y_{\delta_2})\ldots(y_n - y_{\delta_n}),$$

c_1 et c_2 étant deux constantes. Tout cela n'est qu'une conséquence immédiate de la condition ci-dessus supposée. On aura donc

$$f(y_1 y_2 \ldots y_{2n}) = \frac{c_1}{c_2} \frac{(y_1 - y_{\gamma_1})(y_2 - y_{\gamma_2})\ldots(y_n - y_{\gamma_n})}{(y_1 - y_{\delta_1})(y_2 - y_{\delta_2})\ldots(y_n - y_{\delta_n})},$$

ce qui prouve que la fonction donnée est, à un facteur constant près, un rapport hyperanharmonique de $2n$ quantités.

Nous pouvons même ajouter que l'hypothèse d'après laquelle f dépend de rapports anharmoniques n'est pas nécessaire, comme le montre la démonstration que nous venons d'exposer; cette hypothèse est une conséquence des autres. Nous avons donc la conclusion que les deux propriétés 1° et 2° du n° 1 de ce travail sont caractéristiques pour nos rapports hyperanharmoniques ou anharmoniques.