

G. DUMAS

## Sur le problème du scrutin

*Nouvelles annales de mathématiques* 4<sup>e</sup> série, tome 7  
(1907), p. 546-549

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1907\\_4\\_7\\_\\_546\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1907_4_7__546_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

[J2c]

## SUR LE PROBLÈME DU SCRUTIN ;

PAR M. G. DUMAS.

*Deux candidats A et B sont en présence; un électeur bien informé sait à l'avance que A aura m voix et B, n voix, m étant plus grand que n. On demande la probabilité pour que A garde la majorité pendant tout le dépouillement du scrutin.*

MM. André <sup>(1)</sup> et Poincaré <sup>(2)</sup> ont résolu, chacun de leur côté, cet intéressant petit problème. Leurs solutions, ainsi que la suivante, ont de grandes analogies. Elles ne se distinguent que dans la manière, plus simple ici, d'établir l'égalité <sup>(6)</sup>,  $n_1 = n_2$ , ci-dessous indiquée <sup>(3)</sup>.

Supposons que le scrutin ait été dépouillé de toutes les façons possibles. Les bulletins, correspondant à chacun des dépouillements, se succèdent dans un ordre déterminé et constituent, dans leur ensemble, une permutation avec répétition de  $m$  lettres A et  $n$  lettres B.

Soient  $l$  le nombre total de ces permutations,  $k$  le nombre de celles dans lesquelles A conserve, d'un bout à l'autre, la majorité. La probabilité demandée est égale, par définition, à  $\frac{k}{l}$ , où

$$(1) \quad l = \frac{(m+n)!}{n! m!}.$$

<sup>(1)</sup> D. ANDRÉ, *Comptes rendus*, t. CV, 1887, p. 436 et J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 18.

<sup>(2)</sup> H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, p. 21.

<sup>(3)</sup> Voir aussi E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, p. 34.

Il s'agit de déterminer la valeur de  $k$ .

Les permutations, qui se rapportent aux dépouillements dans lesquels A n'a pas la majorité d'un bout à l'autre des opérations, peuvent se répartir en deux classes.

Dans la première  $G_1$ , on mettra les  $n_1$  permutations, dont la première lettre est B. Comme, au début même des dépouillements qui leur correspondent, A perd la majorité, les lettres A et B qu'elles renferment, à partir de la première B, se succèdent n'importe comment.

On a, par conséquent,

$$(2) \quad n_1 = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)! m!}.$$

La seconde classe  $G_2$  renfermera les  $n_2$  autres permutations, de même nature, commençant par A.

On a

$$(3) \quad n_1 + n_2 = l - k.$$

Si, pour fixer les idées, on prend  $m = 5$ ,  $n = 3$ , l'une des permutations de  $G_1$  sera, par exemple,

$$\alpha = (B, B, A, A \mid B, A, A, A);$$

l'une des permutations de  $G_2$ ,

$$\beta = (A, B \mid B, A, A, A, B, A).$$

Dans les seconds membres de  $\alpha$  et  $\beta$ , les traits verticaux ont été tracés de façon qu'il y ait, à leur gauche, le même nombre de lettres A et B. De pareils traits pourront d'ailleurs toujours être menés dans chacune des permutations, supposées écrites, des classes  $G_1$  et  $G_2$ , puisque, dans tous les dépouillements correspondants, A finit toujours par avoir la majorité. S'il

arrive que plusieurs traits, ainsi définis, se rencontrent dans une même permutation, seul sera considéré comme tracé celui qui se trouve le plus à gauche.

Remplaçons maintenant, dans le premier groupe de lettres de  $\alpha$ , les lettres A par des lettres B, et réciproquement. Laissons, en revanche, intactes les lettres du second groupe. La permutation  $\alpha$ , de  $G_1$ , se transforme ainsi en une permutation

$$\alpha' = (A, A, B, B \mid B, A, A, A)$$

du groupe  $G_2$ , puisque  $\alpha'$  commence par A et que, dans le dépouillement correspondant, A n'a pas toujours la majorité.

Toute permutation de  $G_1$  se transforme, de la sorte, en une permutation de  $G_2$ . Comme la transformation, par laquelle on passe de  $\alpha$  à  $\alpha'$ , conduit aussi de  $\alpha'$  à  $\alpha$ , deux permutations distinctes de  $G_1$  auront comme correspondantes deux permutations également distinctes de  $G_2$ .

Les permutations de  $G_1$  sont, par conséquent, en nombre égal ou inférieur à celui des permutations de  $G_2$ .

On a

$$(4) \quad n_1 \leq n_2.$$

On verrait, de la même façon, en partant des permutations  $\beta$  de  $G_2$ , que nécessairement

$$(5) \quad n_2 \leq n_1.$$

De (4) et (5) on déduit aussitôt

$$(6) \quad n_1 = n_2.$$

Les classes  $G_1$  et  $G_2$  comprennent, chacune, un même nombre de permutations; la transformation in-

diquée les réunit par une correspondance univoque et réciproque.

On a donc, en vertu de (1), (2), (3) et (6)

$$k = \frac{(m+n)!}{n!m!} - 2 \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!} = \frac{(m+n-1)!}{n!m!} (m-n).$$

La probabilité, pour que A ait toujours la majorité, se réduit ainsi à

$$\frac{k}{l} = \frac{m-n}{m+n}.$$