

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 420-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__420_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer une surface contenant la parabole*

$$x = 0, \quad y^2 - 4az + 8a^2 = 0$$

et telle que, si l'on projette un de ses points M en M' sur OXY, puis M' en M'' sur le plan tangent en M, le z du point M'' soit égal à a, quel que soit M.

II. *Montrer que les normales à la surface S,*

$$x(x^2 + y^2 + z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0,$$

coupent le plan XOY et le plan XOZ en des points dont le lieu, sur chacun des deux plans, est une simple ligne. Partant de là, déterminer, sans intégration, les lignes de courbure de S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Montrer a priori que, des deux intégrales*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s \sqrt{1-x^2}}, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^s \sqrt{1-x^2}},$$

une seule a une valeur finie. Calculer cette valeur en passant par l'intégrale indéfinie. (Juillet 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Recherche de la ligne de striction d'une surface réglée dont les génératrices sont normales à une courbe donnée S.

Cas des normales principales et des binormales.

Si θ est l'angle de la génératrice G qui coupe la courbe S en M avec la normale principale MN, on exprimera en fonction de θ et des coordonnées de M la distance V du point N au point central M₁ relatif à la génératrice G.

2° Déterminer θ par la condition que la surface, lieu des normales G, soit développable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étant donnée l'équation

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=a:$$

1° Trouver une intégrale complète de cette équation et sa solution singulière;

2° Trouver une surface intégrale qui passe par une circonférence donnée, parallèle au plan xOy , et ayant son centre sur Oz ;

3° Interpréter géométriquement les résultats.

(Juillet 1906.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — PROBLÈME : Étant donnée la surface représentée par l'équation

$$(\sigma) \quad 2az = mx^2 + ny^2,$$

où a, m, n désignent des constantes (axes rectangulaires), calculer le volume limité par cette surface, le plan xOy et le cylindre

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Former l'équation différentielle des courbes de la sur-

face (σ) dont les tangentes font avec Oz un angle donné : intégrer cette équation quand n est nul ou égal à m .

QUESTION DE COURS : 1° Définir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables :

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q) = 0.$$

2° Faire voir comment on peut, d'une intégrale complète, déduire toutes les intégrales de l'équation (1).

3° Démontrer que deux intégrales complètes différentes conduisent à une seule et même solution singulière ; montrer comment cette solution singulière peut être déduite, a priori, de l'équation (1).

4° Appliquer la méthode de recherche précédente à chacune des deux équations

$$(2) \quad z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2,$$

$$(3) \quad z = px + qy + f(p, q).$$

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une surface rapportée à des axes rectangulaires a pour équation

$$z = f(x) + \varphi(y);$$

soient α, β, γ les angles de la normale avec les axes OX, OY, OZ .

1° Déterminer les fonctions f et φ de façon que les rayons de courbure principaux soient reliés par la relation

$$(R + R') \cos \gamma = C.$$

2° Montrer que l'on peut choisir les fonctions f et φ de façon que

$$(R - R') \cos \gamma \tan \alpha \tan \beta$$

soit en même temps constant.

3° Déterminer les lignes de courbure de ces dernières surfaces, et les centres de courbure principaux.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

(Juillet 1906.)

Rennes.ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1^o Calculer, en appliquant le théorème des résidus, l'intégrale

$$\int_{(C)} \frac{dz}{(z-\alpha)^n (z-\beta)^n},$$

prise dans le sens positif le long d'un cercle (C) de rayon 1, ayant pour centre l'origine; n désigne un entier positif, α et β des constantes telles que

$$|\alpha| < 1 \quad \text{et} \quad |\beta| > 1.$$

2^o On considère les intégrales

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z^2 - 2ia z + 1} \quad \text{et} \quad \int_{(C)} \frac{(z^2 + 1) dz}{(z^2 - 2ia z + 1)^2},$$

où a désigne une constante positive et i le symbole $\sqrt{-1}$, ces intégrales étant prises dans le sens positif le long d'un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Calculer les valeurs de ces intégrales.

3^o Calculer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + i \cos \varphi} \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(a + i \cos \varphi)^2},$$

où a et i ont le même sens que dans la question précédente, en faisant le changement de variable défini par l'égalité

$$e^{i\varphi} = z.$$

II. Les axes $Oxyz$ étant rectangulaires, on considère la courbe (C) dont la projection orthogonale sur le plan des x, y est la sinusoïde

$$y = \sin x.$$

1° Former l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la cote z d'un point quelconque de C , considérée comme fonction de l'abscisse x pour que les normales principales de C soient toutes parallèles au plan de coordonnées Oyz .

2° Prouver que, lorsque les normales principales de C sont parallèles au plan des yz , les tangentes font un angle constant avec l'axe des x .

Ce résultat dépend-il de la forme sinusoïdale donnée pour la projection de C sur le plan des xy ?

3° La projection de C sur le plan des xy étant la sinusoïde donnée, indiquer la nature de la courbe C sachant que ses tangentes font un angle de 45° avec Ox .

EPREUVE PRATIQUE. — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz et l'axe Oz étant supposé vertical, on considère la surface (S) définie par l'équation

$$z = \frac{xy}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

où l'on désigne par a une constante, et où l'on prend la valeur positive du radical ; puis le solide (A) limité latéralement par le cylindre

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

en bas par le plan xOy et en haut par la surface (S) .

1° Calculer le volume du solide (A) .

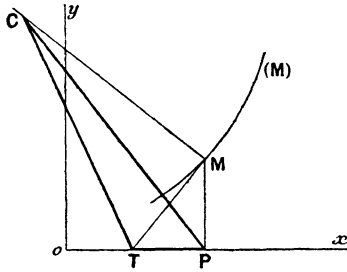
2° Déterminer le centre de gravité du solide (A) en supposant sa densité constante et égale à ρ .

Toulouse.

EPREUVE THÉORIQUE. — I. Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy , on considère sous le nom de courbes (M) les courbes telles que, si l'on représente par C le centre de courbure d'une telle courbe relatif au point M , par P la projection de M sur Ox et par T le point d'intersection de la tangente en M avec Ox , l'aire du triangle CTP soit constante et égale à trois fois l'aire d'un carré de côté donné $\frac{a}{2}$.

1° Exprimer les coordonnées x, y , par rapport à Ox et Oy , d'un point M d'une courbe (M) en fonction du coefficient angulaire t de la tangente en M à cette courbe.

2° Déterminer la forme générale des courbes (M) qui



partent de l'origine O tangentiellement à la droite dont l'équation est

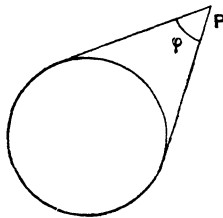
$$y = x.$$

II. Lignes de courbure de la surface représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

dans laquelle a, b, c sont trois constantes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère dans un plan un cercle de rayon donné a . En désignant par φ l'angle des



tangentes issues d'un point quelconque P du plan au cercle et par de l'élément d'aire du plan entourant le point P ,

(426)

on demande de calculer l'intégrale

$$S(\varphi - \sin \varphi) d\varphi$$

étendue à toute la partie du plan extérieure au cercle.

(Juillet 1906.)