

JEAN SERVAIS

**Concours d'admission à l'École
polytechnique en 1906. Composition
d'algèbre et trigonométrie**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 313-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__313_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1906.
COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. Étudier la variation de la fonction $y = L \frac{x-1}{x+2}$,
 où L désigne un logarithme népérien.

II. Évaluer l'intégrale $\int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, et cal-
 culer sa valeur à $\frac{1}{100}$ près quand $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III. L'équation $x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$ a pour
 racines les longueurs des côtés d'un triangle ABC.

Former l'équation ayant pour racines $\cos A$,
 $\cos B$, $\cos C$.

IV. On donne une fonction $f(x)$.

Deux autres fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ sont définies
 par les relations suivantes, où K est un nombre
 constant :

$$\varphi(x) = K \int \frac{dx}{f'(x)}, \quad F(x) = f(x) \varphi(x).$$

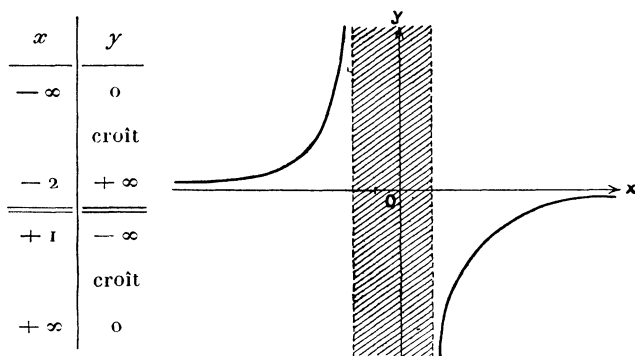
Démontrer qu'on a identiquement :

$$\begin{aligned} \frac{F''(x)}{F(x)} &= \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2K}{f(x)\varphi(x)}, \\ \frac{F'''(x)}{F(x)} &= \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

I. Pour que y soit réelle, il faut que l'on ait :

$$\text{soit } x > 1, \quad \text{soit } x < -2.$$

Dans les deux intervalles $(-\infty, -2)$ et $(1, +\infty)$ la fonction $\frac{x-1}{x+2}$ est *croissante* : dans le premier intervalle elle croît de 1 à $+\infty$, dans le second de 0 à 1. Comme le logarithme népérien varie dans le même sens que le nombre, on a immédiatement le Tableau suivant et la courbe ci-jointe :



II. Pour évaluer l'intégrale

$$J = \int_0^{\alpha} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

posons $x = \tan \varphi$; supposons le radical pris avec le signe $+$ et désignons par β l'arc positif, plus petit que $\frac{\pi}{2}$, tel que

$$\tan \beta = \alpha;$$

l'intégrale devient :

$$J = \int_0^{\beta} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi} = [\arctan \sin \varphi]_0^{\beta} = \arctan (\sin \beta).$$

Or, lorsque

$$\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(315)

on a

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc, dans le cas particulier où

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on a

$$J = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 0,523.$$

III. Soient a, b, c les trois côtés du triangle. On a, comme on sait,

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \\ &= \frac{(a+b+c-2a)(a+b+c)a}{2abc}. \end{aligned}$$

Or, en vertu des relations entre les coefficients et les racines, on a

$$a+b+c = \alpha, \quad abc = \gamma.$$

D'où l'on tire

$$1 + \cos A = \frac{\alpha(\alpha-2a)}{2\gamma}.$$

Si donc nous désignons par x l'une quelconque des racines de l'équation donnée

$$(1) \quad x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0,$$

et par y la racine correspondante de l'équation cherchée, le problème proposé revient à faire la transformée définie par

$$(2) \quad 1 + y = \frac{\alpha x(\alpha - 2x)}{2\gamma}.$$

Il n'y a donc qu'à éliminer x entre cette égalité et

(316)

l'équation (1). L'égalité (2) s'écrit

$$(3) \quad 2\alpha x^2 - \alpha^2 x + 2\gamma(y+1) = 0.$$

En multipliant celle-ci par x , l'équation (1) par $-\alpha$, et ajoutant, on obtient

$$(4) \quad \alpha^2 x^2 + 2[\gamma(y+1) - \alpha\beta]x + 2\alpha\gamma = 0.$$

L'équation cherchée est le résultant des équations (3) et (4). C'est donc :

$$\begin{aligned} & [4\alpha^2\gamma - 2\alpha^2\gamma(y+1)]^2 + [4\alpha\gamma(y+1) - 2\alpha^2\beta + \alpha^4] \\ & [2\alpha^3\gamma + 4\gamma^2(y+1) - 4\alpha\beta\gamma(y+1)] = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en ordonnant par rapport à $y+1$,

$$\begin{aligned} & 8\gamma^2(y+1)^3 + 4\alpha\gamma(\alpha^2 - 4\beta)(y+1)^2 \\ & - 2\alpha^2(\alpha^2\beta - 4\beta^2 + 2\alpha\gamma)(y+1) + \alpha^3(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0. \end{aligned}$$

IV. L'égalité donnée

$$\varphi(x) = K \int \frac{dx}{f'(x)}$$

revient à celle-ci

$$(1) \quad \varphi'(x)f'(x) = K$$

qui donne, par dérivation,

$$(2) \quad \varphi'(x)f''(x) + \varphi''(x)f'(x) = 0.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité

$$F(x) = f(x)\varphi(x),$$

on a

$$(3) \quad \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

qui, en dérivant, donne

$$(4) \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{F'^2(x)}{F^2(x)} - \frac{f'^2(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi'^2(x)}{\varphi^2(x)}.$$

En remplaçant dans cette égalité $\frac{F'(x)}{F(x)}$ par sa valeur tirée de (3), simplifiant et tenant compte de l'égalité (1), on obtient la première égalité demandée

$$(5) \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{2K}{f(x)\varphi(x)}.$$

Dérivons, à leur tour, les deux membres de l'égalité (5) et nous obtenons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{F'''(x)}{F(x)} &= \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)} \\ &+ \frac{F''(x)F'(x)}{F^2(x)} - \frac{f''(x)f'(x)}{f^2(x)} - \frac{\varphi''(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \\ &- \frac{2K[f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x)f(x)]}{f^2(x)\varphi^2(x)}. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons, dans cette égalité, $\frac{F''(x)F'(x)}{F^2(x)}$ par sa valeur obtenue en multipliant membre à membre les égalités (3) et (5) et nous obtiendrons, toutes simplifications faites, la seconde des égalités demandées :

$$\frac{F'''(x)}{F(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{\varphi'''(x)}{\varphi(x)}.$$