

S. LATTÈS

Sur les courbes invariantes par polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 308-312

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__308_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__308_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[P2a]

**SUR LES COURBES INVARIANTES PAR POLAIRES
RÉCIPROQUES ;**

PAR M. S. LATTÈS.

La détermination de toutes les courbes planes invariantes dans une transformation par polaires réciproques a été effectuée depuis longtemps par M. Darboux qui a traité aussi le problème dans l'espace : M. Darboux détermine la surface invariante la plus générale comme enveloppe d'une famille de quadriques invariantes ⁽¹⁾.

J'ai étudié, d'une façon générale, dans ma thèse ⁽²⁾, les courbes invariantes par une transformation de contact en ramenant leur recherche à la résolution d'équations fonctionnelles. Je me propose de montrer dans cette Note comment le problème résolu par M. Darboux peut être traité, à ce dernier point de vue, du moins dans le cas du plan.

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que la conique directrice a pour équation

$$x^2 - 2y = 0.$$

La transformation par polaires réciproques est alors définie par les équations suivantes :

$$(T) \quad X = y', \quad Y = xy' - y, \quad Y' = x.$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Note IX).

⁽²⁾ *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (Paris, 1906); et *Annali di Matematica*, 3^e série, t. XIII.

Soit $y = \Psi(x)$ l'équation d'une courbe invariante par (T). Si (x, y, y') est un élément de cette courbe, l'élément (X, Y, Y') doit appartenir à la même courbe. On doit donc avoir

$$X = \Psi'(x), \quad \Psi(X) = x\Psi'(x) - \Psi(x), \quad \Psi'(X) = x;$$

d'où l'on déduit que la fonction $\Psi(x)$ doit vérifier les deux équations fonctionnelles suivantes :

$$(E) \quad \Psi[\Psi'(x)] = x\Psi'(x) - \Psi(x),$$

$$(E') \quad \Psi'[\Psi'(x)] = x.$$

Nous déterminerons d'abord toutes les solutions de l'équation (E'), puis nous chercherons quelles sont, parmi ces solutions, celles qui vérifient aussi l'équation (E). Si l'on pose

$$\Psi'(x) = \theta(x),$$

l'équation (E') devient

$$(E_1) \quad \theta[\theta(x)] = x.$$

Cette nouvelle équation définit une courbe $y = \theta(x)$ invariante par la transformation

$$(1) \quad X = y, \quad Y = x,$$

qui est une transformation par symétrie par rapport à la droite $y = x$. Amenons l'axe de symétrie à être l'axe Ox . Il suffit de poser

$$\begin{aligned} x &= u + v, & X &= U + V, \\ y &= u - v, & Y &= U - V. \end{aligned}$$

La transformation (1) devient alors

$$U = u, \quad V = -v.$$

Toute courbe invariante par cette transformation

peut être définie par les équations

$$u = F(t), \quad v = \Phi(t),$$

$F(t)$ étant une fonction paire arbitraire et $\Phi(t)$ une fonction impaire arbitraire du paramètre t . Pour $t = 0$, on a un point où cette courbe coupe l'axe de symétrie : nous supposons que les fonctions F et Φ sont définies dans le domaine de $t = 0$, le point $t = 0$ pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire.

En remontant à la transformation (1), on voit que toute courbe invariante par cette transformation peut être définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= F(t) + \Phi(t), \\ y &= \theta(x) = F(t) - \Phi(t). \end{aligned}$$

On a ainsi la solution générale $\theta(x)$ de l'équation (E_1). La solution générale $\Psi(x)$ de l'équation (E') est donc définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= F(t) + \Phi(t), \\ \Psi'(x) &= F(t) - \Phi(t), \end{aligned}$$

$\Psi'(x)$ désignant la dérivée de $\Psi(x)$ par rapport à x . On a donc

$$\begin{aligned} x &= F(t) + \Phi(t), \\ \frac{d\Psi(x)}{dt} &= [F(t) - \Phi(t)] [F'(t) + \Phi'(t)] \end{aligned}$$

et, en intégrant de 0 à t , on voit que la courbe invariante cherchée est définie par les deux équations

$$\begin{aligned} x &= F(t) + \Phi(t), \\ y &= C + \int_0^t [F(t) - \Phi(t)] [F'(t) + \Phi'(t)] dt \end{aligned}$$

ou bien

$$(2) \begin{cases} x = F(t) + \Phi(t), \\ y = C + \frac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} - \frac{F^2(0)}{2} + \int_0^t (F\Phi' - \Phi F') dt \end{cases}$$

et l'on a

$$y' = \frac{dy}{dx} = F(t) - \Phi(t).$$

Il faut chercher, parmi ces courbes, quelles sont celles qui vérifient l'équation (E). Cette équation exprime que, si (x, y, y') est un élément de la courbe, le point

$$X = y', \quad Y = xy' - y$$

appartient aussi à la courbe. Or, on a

$$\begin{aligned} X &= F(t) - \Phi(t), \\ Y &= \frac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{F^2(0)}{2} - C - \int_0^t (F\Phi' - \Phi F') dt. \end{aligned}$$

Changeons t en $-t$ dans ces équations. Elles deviennent

$$\begin{aligned} X &= F(t) + \Phi(t), \\ Y &= \frac{F^2(t) - \Phi^2(t)}{2} + \frac{F^2(0)}{2} - C - \int_0^{-t} (F\Phi' - \Phi F') dt. \end{aligned}$$

Il faut que la courbe définie par ces équations coïncide avec la courbe définie par les équations (2). Comme X et x sont égaux, il faut que Y et y le soient aussi, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{F^2(0)}{2} - C \right) - \int_0^t (F\Phi' - \Phi F') dt \\ - \int_0^{-t} (F\Phi' - \Phi F') dt \equiv 0. \end{aligned}$$

Or $F\Phi' - \Phi F'$ est une fonction *paire* de t et par

suite l'intégrale $\int_0^t (F\Phi' - \Phi F') dt$ est une fonction *impaire* de t . L'égalité précédente devient donc

$$\frac{F^2(0)}{\lambda} = C.$$

Les équations générales d'une courbe invariante par la transformation (T) sont donc

$$(3) \begin{cases} x = F(t) + \Phi(t), \\ y = \frac{F^2(0)}{2} + \int_0^t [F(t) - \Phi(t)] [F'(t) + \Phi'(t)] dt, \end{cases}$$

$F(t)$ étant une fonction *paire* arbitraire de t et $\Phi(t)$ une fonction *impaire* arbitraire de t .

Remarquons que cette courbe contient au moins un élément double de la transformation (T) : c'est l'élément

$$x = F(0), \quad y = \frac{F^2(0)}{2}, \quad y = F(0).$$

En ce point la courbe est tangente à la conique directrice.

Parmi les courbes (3) il y a une infinité de courbes algébriques : on en obtient, par exemple, en prenant pour $F(t)$ un polynôme en t^2 et pour $\Phi(t)$ le produit de t par un polynôme en t^2 . La conique directrice $2y - x^2 = 0$ s'obtient en prenant $F(t) = t^2$, $\Phi(t) = 0$.

On voit que la méthode précédente permet de déduire de toute courbe qui admet un axe de symétrie une courbe qui est sa propre polaire réciproque par rapport à une conique donnée.
