

H. PADÉ

Sur la propriété de concavité de l'herpolhodie de Poinso

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 303-307

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__303_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R8a α]

**SUR LA PROPRIÉTÉ DE CONCAVITÉ DE L'HERPOLHODIE
DE POINSOT;**

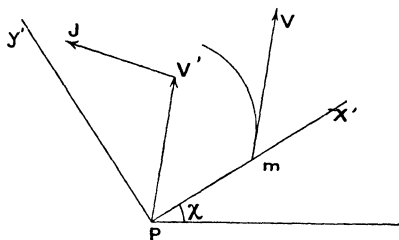
PAR M. H. PADÉ.

1. « La propriété de l'herpolhodie de Poinso^t, de
n'avoir pas de rebroussements et d'être toujours con-

cave vers le pôle des coordonnées, peut être établie sans faire aucun emprunt à la théorie de la courbure et par les seuls moyens élémentaires de la mécanique classique.

» Il suffit de démontrer que la vitesse du point qui décrit l'hodographe correspondant au mouvement du pôle instantané sur l'herpolodie, vitesse qui est équipollente à l'accélération de ce pôle, a un moment de signe invariable autour du pôle des coordonnées, pris pour centre de cette hodographe. » (*Soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux*, séance du 5 avril 1906.)

2. Soient :



m la position, à l'instant t , sur l'herpolodie qu'il décrit, du pôle instantané ;

P le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe sur le plan fixe tangent en m à l'ellipsoïde d'inertie ;

ρ, χ les coordonnées polaires du point m , le point P étant le pôle de ces coordonnées ;

Px', Py' deux axes rectangulaires dont le premier coïncide avec Pm , et tels que $\widehat{x'Py'} = +\frac{\pi}{2}$;

mV la vitesse de m ;

PV' le vecteur équipollent à cette vitesse ; V' décrit l'hodographe du mouvement de m ;

J la vitesse de V' , accélération de m .

3. L'herpolhodie n'aura pas d'inflexions [GILBERT, *Sur quelques formules d'un usage général dans la physique mathématique* (*Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles*, 14^e année, 1890)], si l'angle que fait le vecteur mV avec une direction fixe quelconque du plan de la figure varie toujours dans le même sens; elle n'aura pas de rebroussements, si le vecteur mV n'est jamais nul.

Ces deux conditions seront simultanément réalisées, si le moment de J autour de P conserve un signe invariable pendant toute la durée du mouvement : nous allons constater qu'il en est effectivement ainsi.

4. Dans le système d'axes Px', Py' , les coordonnées de V' sont :

$$\frac{d\rho}{dt}, \quad \rho \frac{d\chi}{dt};$$

les projections de J , vitesse de V' , sont :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2, \quad \rho \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\chi}{dt} \right).$$

Nous devons faire voir que le moment M de J autour de P , savoir :

$$(A) \quad M = \frac{d\rho}{dt} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\chi}{dt} \right) - \rho \frac{d\chi}{dt} \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\chi}{dt} \right)^2 \right]$$

a un signe invariable.

Au moyen des équations du mouvement du point M , cette quantité s'exprime aisément en fonction de ρ seulement.

5. Soient :

A, B, C les moments principaux d'inertie autour du point fixe ;

μ , D deux constantes positives ;

ε le nombre $+1$ ou -1 ;

$$a = -\frac{(B-D)(C-D)}{BCD}, \quad b = -\frac{(C-D)(A-D)}{CAD},$$

$$c = -\frac{(A-D)(B-D)}{ABD};$$

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^2 - a)(\rho^2 - b)(\rho^2 - c);$$

$$E = \frac{(A-D)(B-D)(C-D)}{ABCD}.$$

Les équations qui déterminent ρ et χ en fonction de t sont (*Nouv. Ann. de Math.*, 4^e série, t. III, juillet 1903, p. 289) :

$$\begin{cases} \rho \frac{d\rho}{dt} = \varepsilon \mu \sqrt{\varphi(\rho^2)}, \\ \rho^2 \frac{d\chi}{dt} = \mu(\rho^2 + E). \end{cases}$$

Elles donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\chi}{dt} \right) &= 2\mu^3 \varphi(\rho^2) \\ \rho \frac{d^2\rho}{dt^2} &= \mu^2 \varphi'(\rho^2) - \frac{\mu^2 \varphi(\rho^2)}{\rho^2}; \end{aligned}$$

d'où, en substituant dans (A),

$$(B) \quad M = \frac{\mu^3}{\rho^4} [(3\rho^2 + E) \varphi(\rho^2) - \rho^2(\rho^2 + E) \varphi'(\rho^2) + (\rho^2 + E)^3].$$

6. Posons

$$\varphi(\rho^2) = -D(\rho^6 - \alpha\rho^4 + \beta\rho^2 - \gamma),$$

en sorte que

$$\begin{cases} \alpha = a + b + c, \\ \beta = bc + ca + ab, \\ \gamma = abc; \end{cases}$$

après des réductions immédiates, et en tenant compte de ce que

$$E^2 + abcD = E^2 + \gamma D = 0,$$

on trouve :

$$(C) \quad M = \mu^3 [(2DE + \alpha D + 1) \rho^2 - (2D\beta + \alpha DE - 3E)];$$

ou, en remplaçant α et β par leurs valeurs en A, B, C, D :

$$(D) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= \frac{\mu^3 D^2}{ABC} [(A+B+C-2D) \rho^2 + (A+B+C)E] \\ &= \frac{\mu^3 D^3 \rho^2}{ABC} \left[(A+B+C) \frac{\rho^2 + E}{D\rho^2} - 2 \right]. \end{aligned} \right.$$

7. La quantité M se trouve ainsi mise sous la forme d'un produit de deux facteurs.

Le premier de ces facteurs, qui n'est nul que quand l'herpolhodie est réduite à un seul point, cas que nous laissons naturellement de côté, est essentiellement positif.

Pendant le mouvement, ρ^2 demeure une moyenne entre a , b , c ; la quantité $\frac{\rho^2 + E}{D\rho^2}$ est une moyenne entre

$$\frac{a + E}{Da}, \quad \frac{b + E}{Db}, \quad \frac{c + E}{Dc},$$

ou, simplement,

$$\frac{1}{A}, \quad \frac{1}{B}, \quad \frac{1}{C};$$

le second facteur est donc une moyenne entre

$$\frac{B + C - A}{A}, \quad \frac{C + A - B}{B}, \quad \frac{A + B - C}{C},$$

quantités essentiellement positives.

Donc M garde un signe invariable.