NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PIERRE SICARD

Solution de la question d'analyse du concours d'agrégation de 1905

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 546-557

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__546_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1905;

PAR M. PIERRE SICARD,
Lieutenant au 35e d'Artillerie.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *étant écrite sous la forme*

$$ux + vy + wz = h$$

et les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \cot\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ *et* φ *désignent deux paramètres arbitraires et* $f(\theta, \varphi)$ *une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface* S *en coordonnées tangentielles.*

I. *Démontrer que, si l'on considère sur la surface* S *les deux systèmes de courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que* $f(\theta, \varphi)$ *soit de la forme*

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α *étant fonction de* θ *seul et* β *fonction de* φ *seul. Dans toute la suite de l'énoncé on supposera que* $f(\theta, \varphi)$ *est de cette forme.*

II. *Montrer que les courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$

sont alors les lignes de courbure de la surface **S** *et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de* θ *et de* φ, *les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface* S.

III. *De ces deux rayons, l'un* R_1 *est fonction de* θ *seulement; l'autre* R_2 *dépend en général à la fois de* θ *et de* φ. *Quelle forme doit avoir* $f(\theta, \varphi)$ *pour que* R_2 *soit aussi indépendant de* φ? *Montrer que, dans ce cas, la surface* S *est de révolution autour d'un axe parallèle à* Oz.

IV. *Établir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction* $f(\theta, \varphi)$ *de manière à avoir*

$$R_1 = l \tang \theta, \qquad R_2 = - l \cot \theta,$$

R_1 *et* R_2 *étant, suivant l'usage, affectés d'un signe, et* l *désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.*

V. *Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre* θ *et* φ *qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface* S *et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ces points.*

1. La condition nécessaire et suffisante pour que le système des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ soit conjugué est, comme l'on sait, que les coordonnées tangentielles u, v, w, h satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi \, d\theta} + A \frac{\partial H}{\partial \varphi} + B \frac{\partial H}{\partial \theta} + CH = 0.$$

Dans le cas actuel, les trois coordonnées u, v, w satisfont visiblement à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi \, \partial \theta} = 0;$$

h devant y satisfaire également est nécessairement de la forme $\alpha + \beta$, $h = \alpha + \beta$, α étant fonction de θ seul et β étant fonction de φ seul. C. Q. F. D.

2. Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface (S) sont définies par l'équation

$$\cos\varphi x + \sin\varphi y + \cot\theta z = \alpha + \beta \tag{1}$$

et par les deux équations

$$-\sin\varphi x + \cos\varphi y = \frac{d\beta}{d\varphi}, \tag{2}$$

$$-\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}, \tag{3}$$

obtenues en dérivant successivement l'équation (1) par rapport aux paramètres φ et θ qui entrent dans les coefficients. Nous lisons immédiatement sur les équations (2) et (3) que les courbes $\varphi = \text{const.}$ et $\theta = \text{const.}$ sont respectivement les premières dans des *plans* parallèles à Oz, les secondes dans des *plans* perpendiculaires à Oz. Ces courbes, *conjuguées* et *orthogonales* à la fois, sont nécessairement des *lignes de courbure* de la surface S. Ce résultat aurait pu aussi être mis en évidence en remarquant que $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ satisfait également à la même équation réduite que u, v, w, et h à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\,\partial\theta} = 0.$$

3. Les rayons de courbure R_1 et R_2 se calculent très simplement par les formules dites *d'Olinde Rodrigues*. En désignant par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point (φ, θ), nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} + R_1 \frac{\partial c''}{\partial\theta} = 0 \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + R_2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} = 0. \tag{5}$$

Or la direction (c, c', c'') perpendiculaire au plan tangent (1) est telle que

$$\frac{c}{\cos\varphi} = \frac{c'}{\sin\varphi} = \frac{c''}{\cot\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}.$$

J'en déduis, en prenant le signe + devant le radical,

$$c = \cos\varphi \sin\theta, \tag{6}$$

$$c' = \sin\varphi \sin\theta, \tag{7}$$

$$c'' = \cos\theta. \tag{8}$$

Dès lors l'équation (4) peut s'écrire, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial c''}{\partial \theta}$ par leurs expressions tirées des équations (3) et (8) dérivées,

$$\sin\theta \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + R_1 = 0. \tag{A}$$

L'équation (A) nous montre que R_1 est *fonction de* θ *seul*. Calculons R_2. A cet effet, en résolvant les systèmes des équations (1), (2), (3), je tire

$$x = (\alpha + \beta)\cos\varphi - \frac{d\beta}{d\varphi}\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta\sin\theta\frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\left(\alpha + \sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right).$$

D'autre part, en dérivant par rapport à φ l'équation (6),

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\sin\theta.$$

En portant dans l'équation (5) ces expressions de $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$

et de $\frac{\partial c}{\partial \varphi}$ j'obtiens pour déterminer R_2 l'équation

$$\left(\alpha + \sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right) + R_2\sin\theta = 0.$$

Pour que R_2 soit *indépendant de* φ, il faut et il suffit visiblement que $\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}$ soit une constante c_0 :

$$\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = c_0$$

ou, en intégrant et en désignant par c_1 et c_2 deux autres constantes,

$$\beta = c_0 + c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi.$$

Dans ces conditions, les équations (1), (2), (3), qui définissent les coordonnées d'un point de la surface S, peuvent s'écrire

$$(1') \qquad (x - c_1)\cos\varphi + (y - c_2)\sin\varphi = \alpha + c_0 - z\cot\theta,$$

$$(2') \qquad -(x - c_1)\sin\varphi + (y - c_2)\cos\varphi = 0,$$

$$(3') \qquad -\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis immédiatement que

$$\begin{aligned}(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 &= (\alpha + c_0 - z\cot\theta)^2 \\ &= \left(\alpha + c_0 + \cot\theta\frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta\right) = \text{fonction de } \theta,\end{aligned}$$

$$z = -\frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta = \text{fonction de } \theta.$$

z et $\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$ étant fonctions d'une variable θ, leur jacobien est nul, et par conséquent

$$z = F\left[\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}\right].$$

Relation qui caractérise une surface de révolution autour de l'axe $x = c_1$, $y = c_2$ parallèle à Oz.

C. Q. F. D.

4. Pour que R_1 soit égal à $l \tang\theta$ et R_2 à $-l\cot\theta$, il faut que la fonction α satisfasse à la fois aux deux équations suivantes (A′) et (B′), obtenues en remplaçant, dans les équations (A) et (B), R_1, R_2 et β par leurs expressions :

$$(A') \qquad \sin\theta \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + l \tang\theta = 0,$$

$$(B') \qquad \frac{d\alpha}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + \alpha + c_0 - l\cos\theta = 0.$$

Remarquons tout de suite que ces deux équations ne sont pas incompatibles. Car, si nous dérivons l'équation (B′), nous allons retrouver l'équation (A′). Or l'équation (A′) peut s'écrire

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = -\frac{l\sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis, en intégrant et en désignant par $-c_3$ la constante d'intégration,

$$(C') \qquad \sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta} = l\sin\theta - l\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - c_3.$$

En éliminant $\frac{d\alpha}{d\theta}$ entre (B′) et (C′) j'ai une équation simple qui fournit l'expression de α en fonction de θ

$$\alpha = \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta - c_0.$$

La fonction h est donc déterminée puisque α et β sont calculés

$$h = c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi + \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta.$$

5. L'équation du plan tangent à la surface particulière S que nous envisageons est dès lors

$$(x-c_1)\cos\varphi+(y-c_2)\sin\varphi+(z-c_3)\cot\theta=l\cot\theta\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Nous voyons que nous pouvons faire dans cette équation

$$c_1=c_2=c_3=0,$$

car cela revient à transporter les axes de coordonnées au point (c_1, c_2, c_3). Soit alors par rapport à la nouvelle origine

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi+z\cot\theta=l\cot\theta\int\frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface vérifient cette équation et les deux suivantes :

$$-x\sin\varphi+y\cos\varphi=0,$$

$$-\frac{z}{\sin^2\theta}=-\frac{l}{\sin^2\theta}\int\frac{d\theta}{\cos\theta}+l\frac{\cot\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis très simplement, en résolvant ce système,

$$x=l\cos\varphi\cos\theta,$$
$$y=l\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z=l\left(\int\frac{d\theta}{\cos\theta}-\sin\theta\right).$$

J'en déduis

$$(D)\qquad\begin{cases}dx=l(-\sin\varphi\cos\theta\,d\varphi-\cos\varphi\sin\theta\,d\theta),\\ dy=l(\cos\varphi\cos\theta\,d\varphi-\sin\varphi\sin\theta\,d\theta),\\ dz=l\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)d\theta=l\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta.\end{cases}$$

En sorte que l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2=l^2(\cos^2\theta\,d\varphi^2+\operatorname{tang}^2\theta\,d\theta^2).$$

Formule qui peut également s'écrire

$$ds^2 = l^2 \cos^2\theta \left(\frac{d\theta^2}{\frac{\cos^2\theta}{\tan g^2\theta}} + d\varphi^2 \right).$$

Sous cette forme nous voyons que l'élément considéré est de la forme de l'élément dit *de Liouville*. L'élément de Liouville est, lorsque les paramètres sont u et v, donné par l'équation

$$ds^2 = (U - V)\left(\frac{du^2}{U_1} - \frac{dv^2}{V_1} \right),$$

où U et U_1 sont fonctions de u seul et V et V_1 fonctions de v seul. Toutes les fois que l'élément se présente sous cette forme, la recherche des géodésiques est simple. La relation entre u et v qui définit une géodésique est (Darboux, *Géométrie supérieure, Cours de la Faculté*, 1904-1905), en désignant par a et b deux constantes :

$$b = \int \frac{du}{\sqrt{U_1(U - a)}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{V_1(V - a)}}.$$

Dans le cas actuel, cette relation est

$$b = \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2\cos^2\theta - a}} \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{a}}.$$

La quadrature $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}$ se fait très simplement en posant $\cos\theta = t$. Elle est egale à $-\frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{a\cos\theta}$.
La relation demandée est donc

$$(R) \qquad b + \frac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{a\cos\theta} = \pm \frac{\varphi}{\sqrt{a}}.$$

Telle est la relation qui définit une géodésique quelconque. Remarquons d'ailleurs que les *méridiens* de la

surface (S) sont aussi des *géodésiques planes*. Leur rayon de courbure, et par conséquent leur courbure, ont été *calculés*.

Calculons la *courbure* et la *torsion* d'une géodésique quelconque et, pour fixer les idées, de la géodésique qui correspond à la relation (R), obtenue en prenant le signe — dans le second membre de la relation (R), en sorte que

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = + \frac{\sqrt{a}\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}.$$

Le calcul est identique avec le signe +.

Adressons-nous aux formules connues en Analyse sous le nom de *formules de Frenet-Serret;* α, β et γ désignant les cosinus des angles que font respectivement avec Ox la tangente, la normale principale et la binormale en un point d'une courbe gauche, et ρ et τ le rayon de courbure et la torsion, nous avons les relations

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{\tau}.$$

Dans le cas actuel, la courbe en question étant une géodésique, son plan osculateur en un point passe par la normale en ce point à la surface S. En sorte que $\beta = c = \cos\varphi\sin\theta$ [équation (6)]. D'autre part

$$\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

De sorte que la première des formules de Frenet peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Or dx est donné par la première des équations (D). D'autre part, en remplaçant dans l'expression de l'élé-

ment ds, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ en fonction de θ, nous trouvons

$$ds = \frac{l^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}.$$

Par conséquent

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{-\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{l\sin\theta}\left(\sin\varphi\cos\theta\frac{d\varphi}{d\theta} + \cos\varphi\sin\theta\right)$$
$$= -\frac{1}{l}\left(\cos\varphi\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} + \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\sin\varphi\right).$$

J'en déduis

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{l}\left(\begin{array}{c} -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \cos\varphi\frac{l^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}\frac{d\theta}{ds} \\ +\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sqrt{a}}{\cos^2\theta}\sin\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{ds} \end{array}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{ds}$ par son expression trouvée ci-dessus et $\frac{d\varphi}{ds}$ par son expression $\frac{\sqrt{a}}{l^2\cos^2\theta}$, j'obtiens après réductions

$$\frac{d^2x}{ds^2} = +\frac{\cos\varphi}{l^3\cos^3\theta}(l^2\cos^4\theta - a).$$

La courbure cherchée $C = \frac{1}{\rho}$ est donc égale à $\frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}$:

$$(9) \qquad \boxed{C = \left|\frac{l^2\cos^4\theta - a}{l^3\cos^3\theta\sin\theta}\right|}.$$

Le calcul de la torsion n'est pas plus compliqué. La binormale étant normale à la fois à la tangente et à la normale principale, droites elles-mêmes orthogonales,

$$\gamma = \frac{c'dz - c''dy}{ds}.$$

En remplaçant c' et c'' par leurs expressions tirées des équations (6) et (7) (n° 3), et dy et dz par leurs expressions tirées de D, nous obtenons

$$\gamma = \frac{\sin\varphi \sin\theta \dfrac{l\sin^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta - l\cos\theta(\cos\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta)}{ds}$$

ou, après réductions,

$$\gamma = l\left(\sin\varphi \tan\theta \frac{d\theta}{ds} - \cos\varphi\cos^2\theta\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

ou encore, après avoir remplacé $\frac{d\theta}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{ds}$ par leurs expressions,

$$\gamma = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \sqrt{a}\cos\varphi\right).$$

J'en déduis

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{l}\left(\begin{array}{c} \cos\varphi\dfrac{d\varphi}{ds}\dfrac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{\cos\theta} \\ +\sin\varphi\dfrac{-l^2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (l^2\cos^2\theta - a)\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}\dfrac{d\theta}{ds} + \sqrt{a}\sin\varphi\dfrac{d\varphi}{ds}\end{array}\right)$$

ou, finalement,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \cos\varphi\frac{\sqrt{a}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{l^3\cos^3\theta},$$

et la torsion, donnée par la formule de Frenet, est telle que

$$\frac{1}{\tau} = \left|\frac{\sqrt{a(l^2\cos^2\theta - a)}}{l^3\cos^3\theta\sin\theta}\right|. \qquad (10)$$

Comme vérification, la *courbure* et la *torsion,* données

par les formules (9) et (10), doivent satisfaire à une troisième formule de Serret

$$-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\gamma}{\tau}=\frac{d\beta}{ds}.$$

Cette *vérification* se fait assez simplement.