NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HADAMARD

Sur la théorie des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 145-152

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__145_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[L'1a]

SUR LA THÉORIE DES CONIQUES;

PAR M. HADAMARD.

1. Les propriétés fondamentales, telles que les considère la Géométrie élémentaire, se divisent en deux catégories très distinctes. Les unes sont focales, les autres projectives.

Le passage des unes aux autres me paraît laisser encore à désirer sous le rapport de la simplicité.

Pour passer, par exemple, de la définition focale de l'ellipse à celle-ci : « l'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle », l'élégante démonstration de Courcelles ne laisse pas d'être assez artificielle et de faire apparaître ces deux définitions comme assez éloignées l'une de l'autre. Le théorème de Dandelin appliqué au cylindre conduit, il est vrai, à la même conclusion d'une manière assez intuitive. Encore peut-on désirer une démonstration directe et déduite de considérations de Géométrie plane : « l'ellipse est un cercle dont les ordonnées ont été réduites dans un rapport constant ».

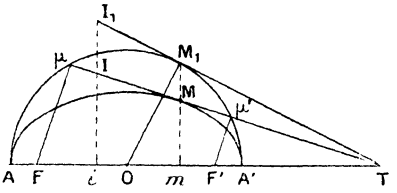
Comme on va le voir, il suffit, pour arriver à ce résultat, de considérer les tangentes à la courbe et non plus les points.

Alors, en effet, on a immédiatement ce théorème :

Si deux tangentes menées, l'une à l'ellipse, l'autre

au cercle principal, se coupent (*en* T) *sur l'axe focal, le rapport des segments* $i\mathrm{I}$, $i\mathrm{I}_1$ (*fig.* 1) *qu'elles interceptent sur une ordonnée quelconque est constant et égal à* $\frac{b}{a}$.

Fig. 1.



Soient, en effet, μ, μ' les projections des foyers F, F' sur la tangente à l'ellipse, c'est-à-dire les intersections de cette tangente avec le cercle principal. On a, par des triangles semblables évidents,

$$\frac{\overline{i\mathrm{I}}^2}{\overline{i\mathrm{T}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{F}\mu}.\overline{\mathrm{F}'\mu'}}{\overline{\mathrm{T}\mu}.\overline{\mathrm{T}\mu'}} = \frac{b^2}{\overline{\mathrm{T}\mu}.\overline{\mathrm{T}\mu'}}.$$

Mais, si M_1 est le point de contact de la tangente au cercle, on a de même

$$\frac{\overline{i\mathrm{I}_1}^2}{\overline{i\mathrm{T}}^2} = \frac{a^2}{\overline{\mathrm{TM}_1}^2},$$

d'où, par division,

$$\frac{\overline{i\mathrm{I}}^2}{\overline{i\mathrm{I}_1}^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

puisque

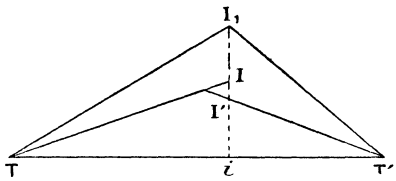
$$\mathrm{T}\mu.\mathrm{T}\mu' = \overline{\mathrm{TM}_1}^2.$$

Si maintenant on considère deux tangentes à l'ellipse et que, par les points T, T' où elles coupent l'axe focal, on mène des tangentes au cercle principal, inclinées sur l'axe respectivement dans le même sens que les tangentes données, *la droite qui joint le point de ren-*

contre des deux tangentes au cercle à celui des tangentes à l'ellipse, est perpendiculaire au grand axe.

Car si, par le point I (*fig.* 2) où se coupent les tan-

Fig. 2.



gentes au cercle, on mène une ordonnée, les segments iI, iI' interceptés sur elle par les tangentes à l'ellipse seront tous deux égaux à $\frac{b}{a} \cdot \overline{iI_1}$; et, comme ils sont de même sens, leurs extrémités coïncident.

Passant à la limite, on voit bien que :

1° *Deux points pris, l'un sur l'ellipse, l'autre sur le cercle et tels que les tangentes en ces points se coupent sur l'axe, ont même abscisse;*

2° *Leurs ordonnées sont dans le rapport constant* $\frac{b}{a}$.

C'est la démonstration demandée.

2. Rien n'empêcherait d'ailleurs de présenter ce même raisonnement si l'on voulait *partir* de la définition de l'ellipse comme figure homographique d'un cercle. Il serait alors acquis que les tangentes aux points correspondants se coupent sur l'axe et ont leurs coefficients angulaires dans le rapport $\frac{b}{a}$; on aurait successivement les conséquences suivantes :

Le produit des perpendiculaires menées à une tangente à l'ellipse par les points μ, μ' *où elle coupe le cercle, et limitées à leurs intersections* F, F' *avec l'axe, est constant et égal à* b^2.

Les points F, F' *sont symétriques par rapport au centre* O *de la courbe.*

Ils sont fixes (la puissance de chacun d'eux par rapport au cercle étant égale à b^2).

On retomberait donc sur l'ellipse, définie comme podaire négative d'un cercle par rapport à un point intérieur.

La seule question nouvelle à résoudre serait la recherche du point de contact M de la tangente ainsi obtenue. La méthode employée à cet effet dans la théorie des podaires négatives montre immédiatement que la droite $O\mu$ passe par le milieu de MF et que, par conséquent, cette dernière droite est parallèle à $O\mu'$.

Si l'on voulait partir uniquement du fait que le point M est sur la même ordonnée que M_1, la même conclusion (1) ressortirait aisément de triangles semblables déduits de l'égalité

$$TO.Tm = T\mu.T\mu',$$

m étant la projection de M sur l'axe (*fig.* 1).

La conclusion en question entraîne d'ailleurs immédiatement la définition focale ordinaire de l'ellipse.

3. L'hyperbole possède, elle aussi, une propriété manifestement destinée à jouer dans sa théorie le même rôle que les propriétés précédentes dans la théorie de l'ellipse. C'est le théorème si simple :

L'aire du parallélogramme qui a un sommet en un point d'une hyperbole et deux côtés suivant les asymptotes, est constante.

Cette proposition est de celles qui ont leur place mar-

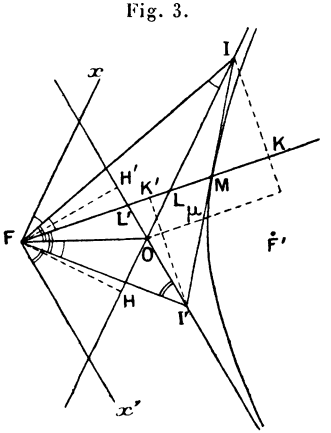
(1) Cette conclusion est immédiate si l'on considère comme connue la théorie des pôles et polaires dans ce cercle.

quée dans tout enseignement géométrique des coniques. Elle n'y a pourtant pas figuré jusqu'ici. La raison en est dans l'absence de démonstration élémentaire. On n'établit habituellement le théorème dont il s'agit que par des calculs de Géométrie analytique plus ou moins déguisés.

On arrive au contraire à une démonstration géométrique simple (qui pourra sans doute être simplifiée encore) en faisant, pour l'hyperbole comme pour l'ellipse, ce qui est fait classiquement pour la parabole, et s'adressant aux tangentes de la courbe.

Il suffit de partir du théorème de Poncelet sur les rayons vecteurs qui vont d'un foyer aux points de contact de deux tangentes et à leur point d'intersection. Ce théorème s'applique aux asymptotes, les rayons vecteurs des points de contact étant remplacés par les parallèles Fx, Fx' (*fig.* 3), menées de F aux direc-

Fig. 3.



tions asymptotiques. Il est alors facile d'établir que :

Le point de contact M *d'une tangente à l'hyperbole divise en deux parties égales le segment* II' *intercepté sur cette tangente par les asymptotes.*

Car si L, L′ sont les points où les asymptotes sont coupées par le rayon vecteur FM, il résulte du théorème cité que les triangles FLI, FL′I′ (*fig.* 3) sont isoscèles. Chacun d'eux a donc ses hauteurs égales et, comme les hauteurs FH, FH′, issues de F, sont égales entre elles, il en est de même des deux autres hauteurs IK, I′K′, ce qui démontre évidemment le théorème.

Ceci prouvé, il suffit d'établir que l'aire du triangle OII′ est constante ou, ce qui revient au même, que le produit OI — OI′ est constant.

Or ce produit est égal à $\overline{OF}^2$, comme le montrent les triangles OFI, OFI′, qui sont semblables comme équiangles.

On peut aussi prouver directement que le triangle OII′ est d'aire constante, en divisant ce triangle en deux triangles partiels par une parallèle Oμ à FM. La somme des deux hauteurs est égale à

$$IK + I'K' = FH + FH' = 2b,$$

et la base commune Oμ est égale à a, le point μ n'étant autre que la projection de F′ sur la tangente.

Là encore on pourrait aisément partir de la nouvelle définition pour retrouver la première.

4. Enfin l'étude des propriétés fondamentales des coniques a son aboutissement dans le théorème suivant :

La perspective d'un cercle est une conique.

Ce n'est pas trop s'avancer que de dire que l'on n'a pas une idée complète de ce que c'est qu'une conique si l'on n'a pas connaissance de ce théorème dans toute sa généralité, c'est-à-dire pour un point de vue et un plan du Tableau *quelconques*.

C'est ce qui a été compris dans le nouveau plan d'études : on y énonce (implicitement) le théorème dont nous parlons, mais à titre de *postulat*.

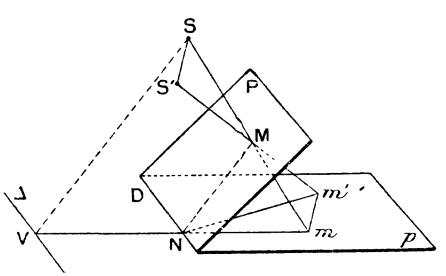
J'avais précédemment essayé, dans mes *Leçons de Géométrie,* d'en donner une démonstration élémentaire. En voici une incomparablement plus simple :

On commence par démontrer que *la projection oblique d'une conique est une conique de même espèce.*

Pour l'hyperbole, c'est une conséquence immédiate de la définition *aréolaire* considérée plus haut. Pour l'ellipse, cela résulte aisément de ce qu'*il existe une ellipse ayant deux demi-diamètres conjugués donnés en grandeur et position* (ellipse qu'on apprend classiquement à construire). On l'obtient enfin pour la parabole, en considérant l'équation de cette courbe rapportée à un diamètre et à une tangente, ou encore en envisageant la parabole comme un cas limite d'ellipse ou d'hyperbole.

Cela posé, soient P le plan d'un cercle dont on fait la perspective, S le point de vue, p le plan du Tableau, qui coupe le premier suivant une droite D (*fig.* 4).

Fig. 4.



Soit S' un point situé sur l'axe du cercle donné. Si S' était le point de vue, le théorème serait démontré, car

le cône qu'il faudrait couper par le plan p serait de révolution.

Supposons, en outre, que la droite SS′ ne soit pas parallèle à p.

M étant un point quelconque du cercle, m sa perspective sur p, menons, par m, la parallèle mm' à SS′, jusqu'à rencontre en m' avec S′M. Le point m' est dans un plan fixe.

Pour l'établir, on mènera par m la perpendiculaire MN sur D, et on la prolongera jusqu'à rencontre en ν avec la parallèle menée par S à MN. On a

$$\frac{mm'}{SS'} = \frac{Mm}{MS} = \frac{Nm}{N\nu}.$$

Or $N\nu$ est constant, car le point ν décrit une droite D parallèle à D (la ligne de fuite).

Donc mm' est proportionnel à Nm, d'où résulte que m' est dans un plan fixe p' passant par D.

Le lieu de m' est la perspective du cercle donné sur p' avec S′ comme point de vue, c'est-à-dire une conique.

Or le lieu de m est la projection oblique du lieu de m'. Le théorème est donc démontré.

La démonstration serait en défaut si SS′ était parallèle au plan p. Mais il suffirait alors de passer par un point intermédiaire S″, pour lequel cette particularité ne se présenterait pas.

On remarquera que nous avons, du même coup, démontré que *la perspective d'une conique quelconque est une conique.* Il suffit, pour le voir, de prendre pour S′ un point d'où l'on voit la conique donnée sous un cône de révolution.