NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A.-G. GREENHILL

Le pendule simple sans approximations

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 97-105

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__97_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[R7fα]

LE PENDULE SIMPLE SANS APPROXIMATIONS;

PAR M. A.-G. GREENHILL.

Traduit par M. C.-A. LAISANT.

Une méthode a été proposée dans les *Nouvelles Annales* (juin 1902) pour éviter l'inconvénient des approximations, employées d'ordinaire dans la discussion élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple. On y arrivait en y substituant une recherche exacte des limites, inférieure et supérieure, entre lesquelles doit tomber la vraie période.

Dans cette méthode, le mouvement oscillatoire du pendule était assimilé à un mouvement de circulation sur un cercle, de vitesse variant, dans le cas des petites oscillations, entre deux limites rapprochées dont l'expression conduisait à celle des limites cherchées de la période.

On se propose ici d'étudier le problème, en assimilant l'oscillation de va-et-vient du pendule avec le mouvement rectiligne d'un corps qui accomplit une vibration simple. Nous ferons usage d'un lemme relatif à la théorie du *mouvement simple harmonique,* savoir :

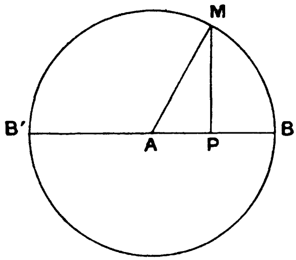
LEMME. — *La vitesse, dans une vibration simple harmonique, est* $\frac{2\pi}{\textit{période}}$ *fois la moyenne géométrique des distances aux deux positions extrêmes du mobile.*

Supposons, en effet, que la vitesse d'un point P, mobile en ligne droite entre B et B′, soit égale à

$$n\sqrt{PB.PB'}.$$

Décrivons le cercle de diamètre BB′, et élevons l'ordonnée MP (*fig.* 1). Alors, MP étant la moyenne géomé-

Fig. 1.



trique de BP et PB′, la vitesse de P est nMP, et la vitesse du point M sur le cercle est nAM, qui est une constante, A étant le centre; de sorte que la circonférence 2πAM du cercle est décrite avec la vitesse constante nAM, donc dans le temps périodique $T = \frac{2\pi}{n}$; et la vitesse de P étant $n\sqrt{BP.PB'}$ est $\frac{2\pi}{T}$ fois la moyenne géométrique des distances du point P à B et B′.

Considérons maintenant le mouvement du point P d'un pendule simple de longueur $OP = l$, oscillant sur un arc fini BAB′, de part et d'autre du point le plus bas A (*fig.* 2).

Pour une particule P, mobile dans un champ de gravité g sur une courbe polie, partant du repos, et tombant à partir du niveau BB′, on a :

(1) $$(\text{vitesse en P})^2 = 2g\,\text{DN}.$$

Or, d'après un théorème connu de Géométrie on a aussi :

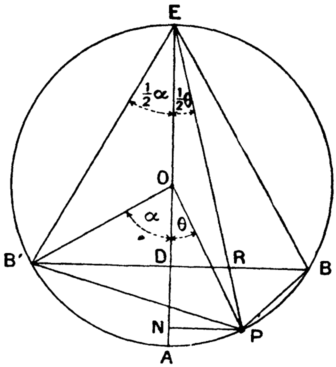
(2) $$PB.PB' = DN.AE,$$

relation où AE est le diamètre vertical du cercle ; si donc nous posons, comme d'habitude, $\frac{g}{l} = n^2$, nous aurons

(3) $$(\text{vitesse en P})^2 = n^2 PB.PB',$$

formule analogue à celle de la vibration rectiligne harmonique simple.

Fig. 2.



Joignant P à E, point le plus haut du cercle BAB' sur lequel P se meut, et désignant par R le point où PE coupe BB', considérons l'oscillation rectiligne de R résultant du mouvement de P sur l'arc circulaire BAB' ; l'ombre de P projetée sur le sol horizontal par une lumière placée en E aura un mouvement analogue à celui de R.

Puisque ERP coupe la droite BRB' et l'arc BPB' sous des angles égaux,

(4) $$\frac{\text{vitesse de R}}{\text{vitesse de P}} = \frac{ER}{EP};$$

et d'après la similitude des triangles EBR et PB'R, BPR et EB′R,

$$(5)\qquad \frac{PB}{BR}=\frac{EB'}{ER} \quad \text{et} \quad \frac{PB'}{B'R}=\frac{EB}{ER},$$

de sorte que

$$(6)\qquad \frac{PB.PB'}{BR.B'R}=\frac{EB^2}{ER^2}.$$

Donc

$$(7)\qquad (\text{Vitesse de R})^2 = n^2 PB.PB'\frac{ER^2}{EP^2} = n^2 BR.RB'\frac{EB^2}{EP^2}.$$

Comme les points P et R oscillent, on a :

$$(8)\qquad 1 > \frac{EB}{EP} > \frac{EB}{EA},$$

de sorte que

$$(9)\qquad n^2 BR.RB' > (\text{vitesse de R})^2 > n^2 BR.RB'\frac{EB^2}{EA^2},$$

et de là, comme conséquence du lemme,

$$(10)\qquad \frac{2\pi}{n} < \text{période d'oscillation de R} < \frac{2\pi}{n}\,\frac{EA}{EB}.$$

Dans les petites oscillations, où EA et EB ne peuvent être distingués, la période est pratiquement

$$(11)\qquad \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ce qui est la formule usuelle; théoriquement la période est toujours plus grande, mais seulement de très peu; et la différence est inappréciable pour les petites oscillations.

La solution complète introduit les fonctions elliptiques, à la manière indiquée par Legendre (*Fonctions elliptiques*, t. I, Chap. VIII).

Désignant l'angle d'oscillation BOB′ par 2α et l'angle AOP par θ, et posant $DB = a$, $DR = x$, on a

$$(12)\qquad a = \text{ED}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha,\qquad \text{EB} = \text{EA}\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

$$(13)\qquad x = \text{ED}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta,\qquad \text{EP} = \text{EA}\cos\frac{1}{2}\theta,$$

et

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= (\text{vitesse de R})^2 \\ &= n^2(a^2 - x^2)\frac{\text{séc}^2\frac{1}{2}\theta}{\text{séc}^2\frac{1}{2}\alpha} \\ &= n^2(a^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\,\text{tang}^2\frac{1}{2}\alpha\right)\cos^2\frac{1}{2}\alpha \\ &= n^2 a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\cos^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{x^2}{a^2}\sin^2\frac{1}{2}\alpha\right); \end{aligned}\right.$$

de sorte que, posant

$$(4)\qquad x = a\cos\varphi,\qquad \sin\frac{1}{2}\alpha = k,\qquad \cos\frac{1}{2}\alpha = k',$$

on a

$$(15)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = n^2(k'^2 + k^2\cos^2\varphi) = n^2(1 - k^2\sin^2\varphi) = n^2(\Delta\varphi)^2,$$

$$(16)\qquad nt + \varepsilon = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \text{F}(\varphi, k),$$

dans la notation de Legendre, ou encore, en introduisant les fonctions elliptiques suivant la méthode d'Abel et la notation de Jacobi,

$$(17)\qquad \varphi = \text{am}(nt + \varepsilon),$$

$$(18)\qquad \text{tang}\,\frac{1}{2}\theta = \text{tang}\,\frac{1}{2}\alpha\,\text{cn}(nt + \varepsilon).$$

Ainsi, le pendule simple bat suivant une loi de fonctions elliptiques, quand il se balance d'un grand angle, comme une cloche; et ces fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions circulaires lorsque l'angle d'oscillation est petit, comme dans un pendule d'horloge ordinaire.

Une roue de bicyclette sur son support à billes présente un appareil approprié pour une illustration expérimentale; on peut modifier l'équilibre de la roue, grâce à l'insertion d'une barre de fer entre les rayons, et l'essieu peut être rendu horizontal ou incliné d'un angle quelconque sur l'horizon.

Quand l'angle d'oscillation 2α approche de 360°, la période d'oscillation tend vers une limite infinie. Si la durée de l'oscillation, pour un angle 2α, est donnée par

$$(19) \qquad T = 4K\sqrt{\frac{l}{g}},$$

de module $k = \sin\frac{1}{2}\alpha$, cette durée est donnée, pour l'angle $360^\circ - 2\alpha$ par

$$(20) \qquad T' = 4K'\sqrt{\frac{l}{g}},$$

de co-module $k' = \cos\frac{1}{2}\alpha$, de sorte que

$$(21) \qquad \frac{T'}{T} = \frac{K'}{K},$$

et la théorie de la multiplication complexe nous permet de déterminer K, K' et α lorsque

$$(22) \qquad \frac{K'}{K} = \sqrt{m}, \qquad \left(\frac{K'}{K}\right)^2 = m,$$

m étant un entier, ou une fraction rationnelle; ou, autrement dit, lorsque le pendule de longueur l, oscillant de $360^\circ - 2\alpha$, est synchrone à un pendule de longueur ml, oscillant de 2α.

Ainsi, pour $m = 3$, l'angle modulaire $\frac{1}{2}\alpha = 15^\circ$ (Legendre, *Fonctions elliptiques,* t. I, Chap. XI, p. 60); de sorte qu'un pendule se balançant de 300° a une période égale à $\sqrt{3}$ fois celle correspondant à 60°, ou encore même période qu'un pendule trois fois plus long, et se balançant de 60°.

Le résultat précédent peut s'interpréter au moyen de la roue de bicyclette dont il a été question plus haut : si l'essieu de cette roue est incliné de manière à faire avec la verticale un angle β donné par la formule

$$\operatorname{coséc}\beta = m,$$

la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 2α sera la même que la durée d'une oscillation d'amplitude égale à $360^\circ - 2\alpha$, l'essieu étant maintenu horizontal.

Par exemple, la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 300° (de $\mathrm{I^h}$ à $\mathrm{XI^h}$, sur un cadran d'horloge), dans le cas de l'essieu horizontal, est égale à la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 60° (de $\mathrm{V^h}$ à $\mathrm{VII^h}$), l'essieu étant incliné de manière à faire avec la verticale l'angle dont la cosécante est égale à 3.

Pour

$$(23)\quad n = 2,\qquad k = \sqrt{2} - 1,\qquad \operatorname{coséc}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2} + 1,\qquad \frac{1}{2}\alpha = 24^\circ, 28'$$

(Legendre, *F. E.*, t. I, p. 106),

$$(24)\quad n = 4,\qquad k = (\sqrt{2} - 1)^2,\qquad \operatorname{coséc}\frac{1}{2}\alpha = (\sqrt{2} + 1)^2,\qquad \frac{1}{2}\alpha = 9^\circ, 53',$$

$$(25)\quad n = 5,\qquad 2kk' = \sqrt{5} - 2,\qquad \operatorname{coséc}\alpha = \left(\frac{1}{2}\operatorname{coséc} 18^\circ\right)^3,$$

$$(26)\quad n = 25,\qquad 2kk' = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{12},\qquad \operatorname{coséc}\alpha = \left(\frac{1}{2}\operatorname{coséc} 18^\circ\right)^{12},$$

$$(27)\quad n = 6,\qquad \operatorname{coséc}\frac{1}{2}\alpha = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$(28)\quad n = 7,\qquad \operatorname{coséc}\alpha = 8,$$

$$(29)\quad n = 49,\qquad \operatorname{coséc}\alpha = \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}\sqrt[4]{7} + 1}{2\sqrt{2}}\right)^{12},$$

$$(30)\quad n = 100,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right) = \frac{128\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{5} - 1)^{12}}$$

(Weber).

On trouvera une collection de ces résultats numériques de la multiplication à la fin des *Fonctions elliptiques* du professeur H. Weber; pour le calcul numérique, il est plus simple de se servir du module réciproque, ou cosécante de l'angle modulaire, qui conduit plus rapidement au résultat sans aucun changement des chiffres par soustraction.

Une évaluation des résultats peut être rapidement obtenue par la formule approchée

$$(31) \qquad e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{n}} \approx 4 \operatorname{coséc} \frac{1}{2}\alpha, \qquad \text{ou} \qquad 8 \operatorname{coséc} \alpha, \qquad n = \left(\frac{k'}{k}\right)^2,$$

pour de grandes valeurs de n.

La valeur numérique de g a été déduite de la relation

$$(32) \qquad g = \pi^2 L,$$

grâce à une soigneuse détermination expérimentale de L, longueur du pendule qui bat la seconde. Il est dès lors plus simple et plus naturel de remplacer la formule qui donne la demi-période dans le cas des petites oscillations

$$(33) \qquad \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

par

$$(34) \qquad \frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{l}{L}}.$$

Pour éviter les calculs numériques, il suffit, pratiquement, de prendre L égal à 1^m (valeur exacte, $0^m,994$). Cela revient à faire

$$(35) \qquad g = \pi^2 = 9,87 \quad \text{(valeur exacte à Paris, 9,81).}$$

Alors la demi-période ou durée d'une oscillation simple du pendule de 1^m étant 1 seconde, celle d'un pendule de l mètres de longueur est $\sqrt{l}$ secondes, s'il s'accomplit de petites oscillations ; et sa période est $2\sqrt{l}$ secondes.