

G. FONTENÉ

## Sur le système articulé de M. Kempe

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1904), p. 8-29

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_\\_8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__8_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[R1e]

## SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE M. KEMPE;

PAR M. G. FONTENÉ.

( Suite. )

## § III. — AUTRES POINTS DE VUE.

10. Si l'on construit la figure de proche en proche, on utilisera seulement 13 conditions (au lieu de 17), et l'on aura à démontrer que quatre longueurs (tiges surabondantes) conservent des longueurs invariables dans la déformation du système obtenu. On peut procéder de diverses manières.

On peut partir de la figure 3, avec les 5 conditions (7) et (12),

$$\widehat{M} = \widehat{M}, \quad \widehat{N} = \widehat{N}, \quad \widehat{P} = \widehat{P}, \quad \widehat{Q} = \widehat{Q},$$

$$\overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D}.$$

La comparaison des relations (13) et (14) montre d'abord, comme on l'a déjà dit, que le rapport  $AB : CD$  reste constant dans la déformation du quadrilatère  $MNPQ$ . De plus, si l'on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{MAD} = x, \\ \widehat{NAB} = x', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{NBA} = y, \\ \widehat{PBC} = y', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{PCB} = z, \\ \widehat{QCD} = z', \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{QDC} = t, \\ \widehat{MDA} = t', \end{array} \right.$$

on a

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x + x' + z + z' = 2^d, \\ y + y' + t + t' = 2^d. \end{array} \right.$$

Pour le démontrer, projetons les points A, B, C, D

( 9 )

en  $A', B', C', D'$  sur les côtés du quadrilatère  $MNPQ$ .  
On a, avec les notations déjà employées,

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{A'N}} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\overline{NB'}}{\overline{B'P}} = \frac{n}{p}, \quad \dots,$$

d'où l'on déduit en passant

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{A'N}} \times \frac{\overline{NB'}}{\overline{B'P}} \times \dots = 1.$$

La condition

$$\overline{A} + \overline{C} = \overline{B} + \overline{D},$$

ou

$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0,$$

équivalent à ceci : *les quatre points  $A', B', C', D'$  sont à un cercle.* En effet, à cause de

$$\frac{\overline{MA'}}{m} = \frac{\overline{A'N}}{n} = \frac{\overline{MN}}{m+n}, \quad \frac{\overline{NB'}}{n} = \frac{\overline{B'P}}{p} = \frac{\overline{NP}}{n+p}, \quad \dots,$$

si  $O$  est un point quelconque, le théorème de Stewart donne

$$\overline{OM}^2 \times n + \overline{ON}^2 \times m - \overline{OA'}^2 \times (m+n) = \frac{a^2 mn}{m+n},$$

$$\overline{ON}^2 \times p + \overline{OP}^2 \times n - \overline{OB'}^2 \times (n+p) = \frac{b^2 np}{n+p},$$

.....;

en ajoutant ces égalités divisées respectivement par  $mn$ ,  
 $-np$ , ..., on obtient, d'après la relation ci-dessus,

$$\overline{OA'}^2 \times \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) - \overline{OB'}^2 \times \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) + \dots - \dots = 0,$$

et l'on sait qu'une telle relation sans constante n'a lieu que si les points  $A', B', C', D'$  sont à un cercle. Or, comme les triangles  $DMA$  et  $D'MA'$ ,  $ANB$  et  $A'NB'$ , ...,

sont semblables deux à deux, la première des relations (17) devient

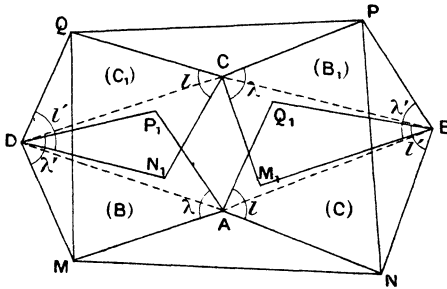
$$\widehat{MA'D'} + \widehat{NA'B'} + \widehat{PC'B'} + \widehat{QC'D'} = 2^d,$$

ou encore

$$\widehat{D'A'B'} + \widehat{B'C'D'} = 2^d,$$

ce qui a lieu dans le quadrilatère inscriptible  $A'B'C'D'$ .  
Construisons alors (*fig. 5*) le triangle  $AQ_1B$  inver-

Fig. 5.



sement semblable au triangle  $CQD$  et le triangle  $CN_1D$  inversement semblable au triangle  $ANB$ ; les quadrilatères

$$ANBQ_1 \text{ et } CN_1DQ,$$

ou  $(B)$  et  $(C_1)$ , sont inversement semblables, et, en raison de la constance du rapport  $\frac{AB}{CD}$ , cette similitude persiste dans la déformation du système. Il en sera de même pour les quadrilatères inversement semblables

$$AMDP_1 \text{ et } CM_1BP,$$

ou  $(B)$  et  $(B_1)$ , obtenus d'une manière analogue.

La figure satisfait ainsi à 13 conditions, et il faut montrer que les 4 côtés du quadrilatère  $M_1N_1P_1Q_1$  con-

servent des longueurs invariables dans la déformation du système.

Les angles en A, B, C, D des triangles AP<sub>1</sub>Q<sub>1</sub>, BQ<sub>1</sub>M<sub>1</sub>, . . . , qui bordent ce quadrilatère doivent donc être constants.

Or on a, avec les notations de la figure,

$$\begin{aligned} \lambda &= x + z, & l &= x' + z', \\ l' &= y + t, & \lambda' &= y' + t', \end{aligned}$$

et les relations (17) donnent

$$\lambda + l = 2^d, \quad \lambda' + l' = 2^d,$$

d'où l'on conclut que les angles en question sont supplémentaires des angles en A, B, C, D des triangles AMN, BNP, . . . .

On peut chercher à établir directement les égalités

$$\lambda + l = 2^d, \quad \lambda' + l' = 2^d.$$

Ou a d'abord

$$(18) \quad (\lambda + l) + (\lambda' + l') = 4^d.$$

D'autre part, on a facilement, entre les angles opposés  $\lambda$  et  $\lambda'$  du quadrilatère (B), la relation

$$\frac{ac}{\sin A \sin C} \cos \lambda - \frac{bd}{\sin B \sin D} \cos \lambda' = \text{const.};$$

on a de même

$$\frac{ac}{\sin A \sin C} \cos l - \frac{bd}{\sin B \sin D} \cos l' = \text{const.};$$

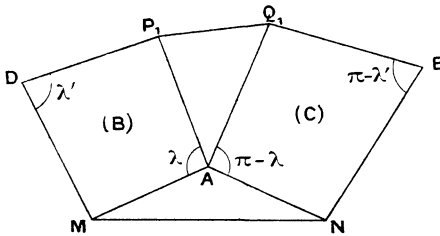
on peut voir sans calcul que les deux constantes ont une somme nulle, et l'addition donne, en tenant compte de (18), une relation qui admet la solution cherchée  $\lambda + l = 2^d$ , et une solution étrangère.

11. On peut encore partir de la figure 6, où l'on suppose d'abord

$$\widehat{P_1 A Q_1} + \widehat{M A N} = 2^d,$$

afin d'avoir au point A les angles variables supplémentaires  $\lambda$  et  $\pi - \lambda$ . Les cosinus des angles variables B et D sont alors liés par une relation linéaire, et, sous deux conditions nouvelles, les angles B et D varieront

Fig. 6.



en restant constamment supplémentaires; si l'on pose

$$\begin{aligned} AN = b, \quad AQ_1 = b', \quad BN = \beta, \quad BQ_1 = \beta', \\ AM = d, \quad AP_1 = d', \quad DM = \delta, \quad DP_1 = \delta', \end{aligned}$$

les deux conditions sont

$$(19) \quad \frac{bb'}{\beta\beta'} = \frac{dd'}{\delta\delta'} = \frac{(bd + b'd')(bd' + b'd)}{(\beta\delta + \beta'\delta')(\beta\delta' + \beta'\delta)}.$$

La figure dépend de 7 paramètres, puisque les 10 longueurs vérifient 3 conditions.

Si l'on construit alors sur les côtés NB et MD deux triangles convenables, NBP et MDQ, on pourra démontrer que la longueur PQ reste constante dans la déformation de la figure; deux des 4 conditions seront

$$\widehat{M} = \widehat{M}, \quad \widehat{N} = \widehat{N}.$$

De même, si l'on construit sur les côtés Q1B et P1D

deux triangles convenables,  $Q_1BM_1$  et  $P_1DN_1$ , la longueur  $M_1N_1$  restera constante dans la déformation de la figure. Enfin, si l'on construit le triangle  $PQC$  au moyen des angles  $P$  et  $Q$ , les côtés  $CM_1$  et  $CN_1$  du triangle  $M_1N_1C$  auront des longueurs constantes.

Si, dans la figure 2, on supprime les 4 tiges surabondantes  $CB'$ ,  $BC'_1$ ,  $C_1B'_1$ ,  $B_1C'_1$ , la figure obtenue est formée par la réunion de deux figures analogues à la figure 6, l'une des deux figures déterminant complètement l'autre.

12. Revenons à la figure 1. On peut de quatre manières différentes, en isolant un couple de triangles opposés, regarder le système comme formé d'une *chaîne de 6 triangles, dans laquelle les sommets libres des 3 triangles de rangs impairs sont articulés avec les sommets d'un triangle de rattachement, et les sommets libres des 3 triangles de rangs pairs sont de même articulés avec les sommets d'un autre triangle de rattachement*. Ces chaînes de triangles bordent des contours hexagonaux dont l'un forme le périmètre de la figure 1, et dont les trois autres sont

$$GBA'C_1B_1A'_1, \dots;$$

elles généralisent les 4 pentagones de l'appareil à 8 tiges auquel conduit l'appareil à ligne droite de Hart.

Considérons (*fig. 2*) l'hexagone articulé  $B'C'_1A'B'_1C'A'_1$ , bordé par les triangles  $a, b_1, c, a_1, b, c_1$  qui forment deux systèmes. En premier lieu, ces triangles doivent satisfaire aux conditions suivantes. D'une part, en chaque sommet de l'hexagone, les angles de triangles marqués sur la figure sont égaux; les 6 angles changés de signe sont d'ailleurs

$$\gamma_1 - \alpha, \alpha - \beta_1, \dots, \beta - \gamma_1,$$

de sorte que leur somme est nulle; ils satisfont en outre à la condition

$$\sin A' \sin B' \sin C' = - \sin A'_1 \sin B'_1 \sin C'_1.$$

D'autre part, on a les trois relations d'aires

$$\bar{a} + \bar{a}_1 = 0, \quad \bar{b} + \bar{b}_1 = 0, \quad \bar{c} + \bar{c}_1 = 0.$$

On a ainsi 11 conditions, qui laissent 7 paramètres pour les triangles.

En second lieu l'hexagone, dont la forme dépend de 3 paramètres, doit se déformer sous les 2 conditions suivantes, qui laissent un paramètre de déformation : *les angles égaux  $\lambda'$  marqués au point  $A'$  doivent être égaux aux angles égaux  $\lambda'$  marqués au point  $A'_1$ , et il doit en être de même pour les angles  $\mu'$  aux points  $B'$  et  $B'_1$ ; il en est alors de même pour les angles  $\nu'$  aux points  $C'$  et  $C'_1$ ; car, en admettant qu'il en est ainsi, la somme des angles de l'hexagone est*

$$\begin{aligned} & \mu' + (\alpha - \gamma_1) + (2^d - \nu') + (\beta_1 - \alpha) \\ & + \lambda' + (\gamma - \beta_1) + (2^d - \mu') + (\alpha_1 - \gamma) \\ & + \nu' + (2^d + \beta - \alpha_1) + (2^d - \lambda') + (\gamma_1 - \beta), \end{aligned}$$

ou 8<sup>d</sup>.

Sous les 13 conditions qui viennent d'être indiquées, les côtés des deux triangles ABC et  $A_1 B_1 C_1$  restent constants pendant la déformation. Ces 6 côtés complètent les 6 quadrilatères (A), (B), (C), ( $A_1$ ), ( $B_1$ ), ( $C_1$ ) inversement semblables deux à deux.

#### § IV. — TIGES AU LIEU DE PLAQUES.

13. Examinons le cas (*fig. 7*) où *les plaques triangulaires sont remplacées par de simples tiges*. En général (*fig. 3*), si l'on donne le quadrilatère MNPQ, les points A, B, C, D dépendent de 3 paramètres.



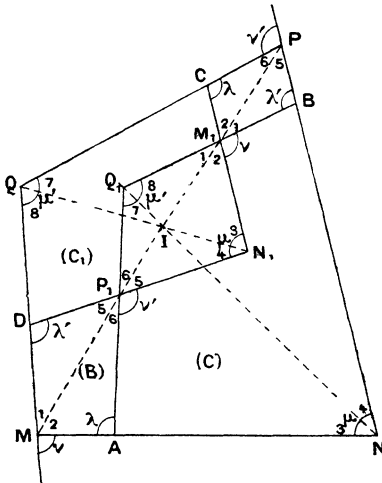
On peut se donner, avec 2 paramètres, les projections  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  de ces points sur les côtés du quadrilatère :

1° On doit avoir

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{A'N}} \times \frac{\overline{NB'}}{\overline{B'P}} \times \dots = 1;$$

2° Les 4 points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  doivent être à un

Fig. 7.



cercle; on se donne en outre l'angle  $AMN$ . Si cet angle devient nul, les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  viennent en  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ; on peut se donner le quadrilatère  $MNPQ$ , et les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sous les 2 conditions suivantes :

1° On doit avoir

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{BP}} \times \dots = 1,$$

c'est-à-dire que les droites  $AB$ ,  $CD$  doivent se couper

en un point  $J$  situé sur  $MP$ , ou encore les droites  $AD$ ,  $CB$  doivent se couper en un point  $K$  situé sur  $NQ$ ;

2° Les 4 points  $A, B, C, D$  doivent être à un cercle.

Le système dépend alors de 6 paramètres.

14. Les 8 tiges forment 2 tétrades et 4 couples :

ANM	$B M_1 Q_1$	CQP	$D P_1 N_1$
$C N_1 M_1$	DMQ	$A Q_1 P_1$	BPN

2 tiges qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulées entre elles. De trois manières différentes, le système est formé de 2 quadrilatères articulés, qui sont articulés entre eux; dans le Tableau suivant, la dernière colonne indique les points d'articulation pour  $MN$  et  $P_1 Q_1, \dots$  :

$$\begin{array}{ll}
 (M, N, P, Q; P_1, Q_1, M_1, N_1), & (A, B, C, D), \\
 (A, M, D, P_1; B, P, C, M_1), & (N, Q, N_1, Q_1), \\
 (A, N, B, Q_1; D, Q, C, N_1), & (M, P, M_1, P_1);
 \end{array}$$

les quadrilatères  $MNPQ$  et  $M_1 N_1 P_1 Q_1$  sont inversement semblables, ainsi que les quadrilatères  $AMDP_1$  et  $CM_1 BP$ ,  $ANBQ_1$  et  $CN_1 DQ$ .

15. De la méthode employée au § II pour le cas général, je retiendrai seulement ceci. Si l'on pose

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{m}{n}, & \frac{\overline{NB}}{\overline{BP}} = \frac{n}{p}, \quad \dots, \\
 \frac{\overline{M_1 C}}{\overline{CN_1}} = \frac{m_1}{n_1}, & \frac{\overline{N_1 D}}{\overline{DP_1}} = \frac{n_1}{p_1}, \quad \dots,
 \end{array}$$

( 17 )

il faut, dans les formules (10'), remplacer  $m, n, \dots$  par  $Gm, Gn, \dots$ , remplacer  $m_1, n_1, \dots$  par

$$Gm_1 \times (nq - mp), \quad Gn_1 \times (nq - mp), \quad \dots,$$

et faire  $G$  infini; cela donne

$$m_1 = \frac{p}{(p+n)(p+q)},$$

$$-n_1 = \frac{q}{(q+p)(q+m)},$$

.....

On a encore

$$\frac{k^2}{(nq - mp)^2} = \frac{m_1 p_1}{mp} = \frac{n_1 q_1}{nq}$$

$$= \frac{1}{(m+n)(m+q)(p+n)(p+q)},$$

la dernière expression de  $k^2$  étant celle de M. Darboux; on peut écrire

$$\frac{-k^2}{nq - mp} = \frac{m_1 + n_1}{m+n} = \frac{n_1 + p_1}{n+p} = \dots$$

16. La première méthode du § III (n° 10) est ici la plus simple, en partant des hypothèses du n° 13, dont la seconde se traduit par la relation

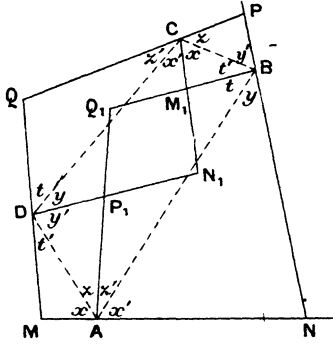
$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0.$$

On verra d'abord que le rapport  $\frac{AB}{CD}$  reste constant dans la déformation du contour, ainsi que le rapport  $\frac{AD}{CB}$ .

On construira les quadrilatères inversement sem-

blables  $ANBQ_1$  et  $CN_1DQ$ ; et l'on démontrera que le point de croisement  $M_1$  des tiges  $BQ_1$  et  $CN_1$  reste

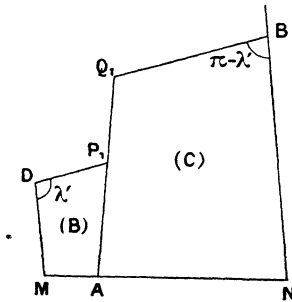
Fig. 8.



fixe sur chacune de ces tiges dans la déformation du système, de même que le point de croisement  $P_1, \dots$  (voir la figure 8).

17. Avec la méthode du n° 11, on partira de la figure 9, supposée telle que les angles marqués en B et D

Fig. 9.



soient supplémentaires; etc. La figure complète peut être regardée comme formée de cette figure 9 et d'une figure

analogue comprenant les quadrilatères  $(B_1)$  et  $(C_1)$ ; si l'on rapproche les points D des deux figures, ainsi que les points B, on doit obtenir les lignes droites

$$DMQ, BNP, BM_1Q_1, DN_1P_1.$$

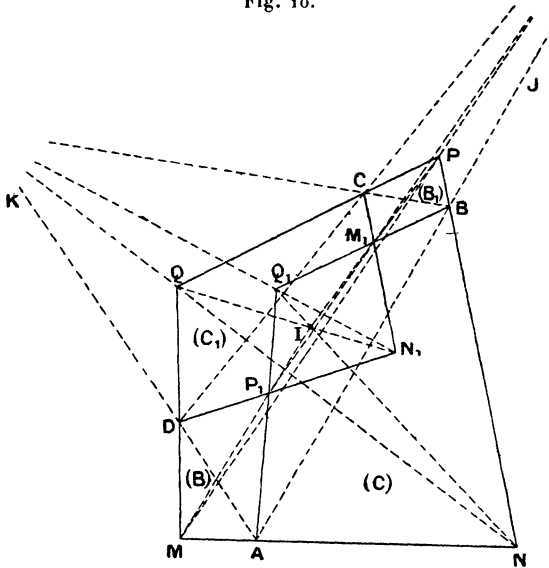
18. Enfin, d'après ce qu'on a vu au n° 12, on peut de quatre manières différentes (*fig. 7*), en isolant un couple de tiges  $(AQ, P_1)$  et  $(CQP)$  par exemple), regarder le système comme formé d'un contour hexagonal  $(MNB M_1 N_1 D)$  dont les trois côtés de rangs impairs sont articulés avec l'une des tiges du couple isolé, les trois côtés de rangs pairs étant articulés avec l'autre tige de ce couple. L'hexagone considéré doit se déformer de manière que les angles opposés, marqués sur la figure en M et  $M_1$ , N et  $N_1$ , B et D, soient égaux deux à deux, ce qui forme deux conditions et non trois.

19. Par symétrie, il résulte de ce qu'on a vu au n° 13 que les diagonales homologues AB, CD des quadrilatères  $(C)$  et  $(C_1)$  et les diagonales homologues MP,  $M_1 P_1$  des quadrilatères  $(A)$ ,  $(A_1)$  passent par un même point J (*fig. 10*); que, de même, les diagonales AD, CB des quadrilatères  $(B)$ ,  $(B_1)$  et les diagonales NQ,  $N_1 Q_1$  des quadrilatères  $(A)$  et  $(A_1)$  passent par un même point K; enfin, les diagonales  $MP_1$ ,  $M_1 P$  des quadrilatères  $(B)$  et  $(B_1)$  et les diagonales  $NQ_1$ ,  $N_1 Q$  des quadrilatères  $(C)$  et  $(C_1)$  passent par un même point I. En outre, les quatre points d'articulation A, B, C, D sont à un cercle, et il en est de même des quatre points d'articulation N, Q,  $N_1$ ,  $Q_1$ , des quatre points d'articulation M, P,  $M_1$ ,  $P_1$ .

L'existence du point I peut d'ailleurs s'établir directement; le point de rencontre des diagonales homo-

logues  $MP_1$ ,  $M_1P$  des quadrilatères  $(B)$  et  $(B_1)$  est, en effet (*fig. 8*), *homologue de lui-même* pour les deux quadrilatères inversement semblables  $(A)$  et  $(A_1)$ , et il en est de même du point de rencontre des diagonales homologues  $NQ_1$ ,  $N_1Q$  des quadrilatères  $(C)$  et  $(C_1)$ ;

Fig. 10.



or, il existe un seul point  $I$  tel que les deux triangles  $IMN$ ,  $IM_1N_1$  soient inversement semblables. Les relations

$$\frac{IM_1}{IM} = \frac{IN_1}{IN} = \frac{IP_1}{IP} = \frac{IQ_1}{IQ}$$

donnent, en particulier,

$$IM_1 \times IP = IP_1 \times IM, \quad IN_1 \times IQ = IQ_1 \times IN,$$

et l'on voit ainsi directement que les quatre points  $M$ ,  $P$ ,  $M_1$ ,  $P_1$  sont à un cercle, de même que les quatre points  $N$ ,  $Q$ ,  $N_1$ ,  $Q_1$ .

On a, en outre,

$$\widehat{MIN} + \widehat{PIQ} = \widehat{MIN} + \widehat{P_1IQ_1} = 2^d;$$

le point I est donc foyer d'une conique inscrite au quadrilatère MNPQ, et ce point a la même propriété pour le quadrilatère  $M_1N_1P_1Q_1$ .

De la similitude inverse des quadrilatères (A) et  $(A_1)$  par exemple, il résulte que les quatre couples de tiges

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ANM,} \\ \text{CN}_1\text{M}_1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{BM}_1\text{Q}_1, \\ \text{DMQ,} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{CQP,} \\ \text{AQ}_1\text{P}_1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{DP}_1\text{N}_1, \\ \text{BPN} \end{array} \right\}$$

ont mêmes directions de bissectrices : ce sont les directions des axes autour desquels on doit replier (A) pour le rendre parallèle à  $(A_1)$ , etc. Ces mêmes directions sont celles des bissectrices des angles que forment

$$\text{en I } \left\{ \begin{array}{l} \text{MP}_1 \text{ et } \text{M}_1\text{P,} \\ \text{NQ}_1 \text{ et } \text{N}_1\text{Q,} \end{array} \right\} \quad \text{en J } \left\{ \begin{array}{l} \text{AB et CD,} \\ \text{MP et M}_1\text{P}_1, \end{array} \right\} \quad \text{en K } \left\{ \begin{array}{l} \text{AD et CB,} \\ \text{NQ et N}_1\text{Q}_1; \end{array} \right\}$$

le fait que les angles formés en I par IM et IP ont mêmes bissectrices que ceux formés par IN et IQ se traduit encore ainsi : le point I est foyer d'une conique inscrite à MNPQ.

On peut se donner le quadrilatère articulé MNPQ; le point I étant foyer d'une conique inscrite à ce quadrilatère, pour l'une des formes qu'on peut lui donner, on peut prendre  $M_1$  quelconque sur IP, et déterminer  $N_1$ ,  $P_1$ ,  $Q_1$  par les propriétés précédentes.

## § V. — L'APPAREIL DE HART.

### 20. D'après la formule générale

$$k^2 = \frac{(nq - mp)^2 + (m + n + p + q)^2}{(m + n)(m + q)(p + n)(p + q)},$$

si l'on veut avoir  $k = 0$ , pour des valeurs finies de  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , il faut faire simultanément

$$n + q = -(m + p), \quad nq = mp,$$

de sorte que  $n$  et  $q$  doivent être  $m$  et  $p$  changés de signe, soit

$$m + n = 0, \quad p + q = 0;$$

mais alors la valeur de  $k^2$  se présente sous la forme illusoire  $\frac{0}{0}$ . [Cela donne d'ailleurs

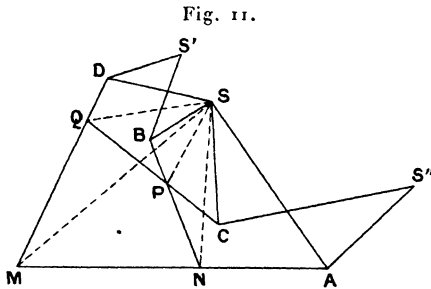
$$\beta = \gamma, \quad \beta_1 = \gamma_1,$$

de sorte que (*fig. 2*) les points  $A$  et  $A_1$  sont rejetés à l'infini; ce cas est sans intérêt.]

Pour pouvoir faire  $k = 0$ , il faut se placer dans le cas où les plaques triangulaires sont remplacées par des tiges; la condition est alors, en prenant  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  dans le sens indiqué au n° 15,

$$mp = nq;$$

les divisions de points  $MAN$  et  $QCP$  (*fig. 11*) doivent



être semblables, ainsi que les divisions de points  $MDQ$  et  $NBP$ ; les 4 points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  doivent d'ailleurs être à un cercle; le système dépend de 5 paramètres.



21. On obtient une théorie simple de l'appareil en le présentant comme il suit :

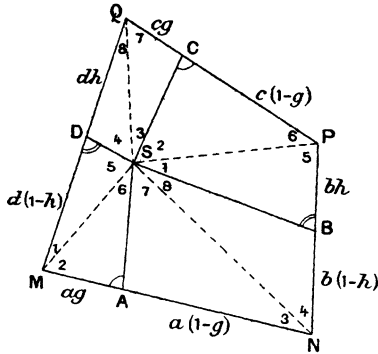
*Soit un contour quadrangulaire plan MNPQ et S un point (foyer d'une conique inscrite) tel que les directions SM et SP d'une part, SN et SQ d'autre part, aient même bissectrice. Menons SA, SB, SC, SD telles que chacune de ces droites et le côté du contour opposé à celui auquel elle aboutit soient également inclinés, en sens contraires, sur ces bissectrices. Le système articulé, représenté par la figure, est déformable dans le plan.*

Les quadrilatères MDSA et SBPC sont inversement semblables, ainsi que les quadrilatères NBSA et SDQC, comme le montre un renversement autour de l'une des bissectrices indiquées; cette remarque servira dans un instant.

Dès 1877, Hart avait donné dans les *Proceedings* (t. VIII, p. 288) l'appareil à ligne droite qui porte son nom et qui est un cas singulier du système de Kempe considéré ici (*fig. 11*); en 1879, M. Darboux (*Bulletin*, 1879, p. 144) appliquait la méthode de Hart à ce dernier système, et une partie du calcul de cet auteur doit être conservée. Si l'on supprime d'abord la liaison PQ, et si l'on se borne à considérer le pentagone SDMNB, on trouve que la liaison SA est celle qui assure l'égalité des angles marqués en B et D sur la figure : cela résulte de la relation linéaire entre  $\overline{SM}^2$  et  $\overline{SN}^2$  qui traduit cette égalité. Au lieu de continuer l'emploi du calcul pour remplacer la tige SA par la tige PQ sans s'occuper de la tige SC, nous considérerons avec M. J. Réveille (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 128) l'ensemble du système tel que Kempe l'a envisagé le premier, c'est-à-dire le

système de la figure 11; les points Q et P sont définis par les triangles semblables SDQ et NBS, SBP et MDS (la figure 12 est plus connue). Si l'on dénoue seulement

Fig. 12.



l'articulation Q, et si l'on appelle Q le point d'intersection des droites MD et PC dans la figure déformée, la similitude des quadrilatères MDSA et SBPC entraîne celle des deux autres, les longueurs DQ et CQ gardent leurs valeurs premières, l'articulation Q se maintient d'elle-même.

Des quatre tiges qui guident le point S dans la déformation du contour MNPQ, on peut en supprimer deux, soit consécutives, soit opposées.

22. Avec les notations de la figure, en appelant O le point d'intersection des droites AC, BC, le théorème de Stewart pour les deux systèmes d'obliques SA, SO, SC et SB, SO, SD donne immédiatement, entre les longueurs  $SA = \alpha$ ,  $SB = \beta$ , . . . , la relation

$$h\alpha^2 + (1-h)\gamma^2 = g\beta^2 + (1-g)\beta^2.$$

La déformabilité du système se traduit alors par les 5 re-

lations

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{\gamma}{a} = \frac{\beta}{d} = \frac{\delta}{b} = \sqrt{g(1-g) \times h(1-h)},$$

$$\frac{c}{h} = \frac{a}{1-h} \cdot \frac{\beta}{g} = \frac{\delta}{1-g}$$

$$c\alpha + a\gamma = d\beta + b\delta.$$

23. On en déduit

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g};$$

si  $a, b, c, d$  sont donnés,  $g$  et  $h$  sont ainsi liés par une relation doublement quadratique à cause du cercle ABCD. Pour une même valeur de  $h$ , on a deux valeurs de  $g$ ; si l'on désigne ces valeurs par  $g$  et  $g'$ , on a

$$\frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = \frac{d^2}{g'} + \frac{b^2}{1-g'},$$

ou

$$\frac{d^2}{gg'} = \frac{b^2}{(1-g)(1-g')},$$

ou

$$\frac{d^2(1-g)}{g} = \frac{b^2 g'}{1-g'},$$

ou

$$\frac{d^2}{g^2} \times g(1-g) = \frac{b^2}{(1-g')^2} \times g'(1-g');$$

en appelant  $\beta'$  et  $\delta'$  les nouvelles tiges S'B, S'D, on a donc  $\beta' = \delta, \delta' = \beta$ , de sorte que BSDS' est un contre-parallélogramme, comme on le voit d'ailleurs par l'examen du pentagone fondamental S'DMNB; Kempe signale ce fait, que Hart avait déjà indiqué pour le cas singulier considéré par lui.

24. Si l'on regarde  $g$  et  $h$  comme les coordonnées cartésiennes d'un point, la courbe représentée par l'équa-

tion ci-dessus est une cubique circonscrite au quadrilatère complet  $g = 0$ ,  $g = 1$ ,  $h = 0$ ,  $h = 1$ . Cette cubique est nodale si l'on a

$$c + a = d + b \quad (= l),$$

c'est-à-dire si le quadrilatère MNPQ est circonscriptible à un cercle; on a au point double

$$g = \frac{d}{l}, \quad 1 - g = \frac{b}{l},$$

$$h = \frac{c}{l}, \quad 1 - h = \frac{a}{l},$$

et, si l'on adopte ces valeurs de  $g$  et de  $h$ , on a

$$NA = NB = \frac{ab}{l}, \quad PB = PC = \frac{bc}{l}, \quad \dots$$

On a alors

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\sqrt{abcd}}{l},$$

de sorte que S est centre du cercle ABCD; d'après  $NA = NB$ , ..., ce point est en même temps centre du cercle inscrit au quadrilatère (foyer double).

M. Darboux a déjà montré (*Bulletin*, 1879, p. 67) que, si l'on déforme le quadrilatère circonscriptible MNPQ en maintenant fixes les points M et N, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle.

25. L'appareil de Hart pour le guidage rectiligne d'un point s'obtient en prenant  $g$  infini, d'où résulte

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = 0.$$

Dans la figure 12, le pentagone de Hart est S'DMNB, sous la condition

$$DS' \times DM = BS' \times BN;$$

on a donc

$$\overline{S'M}^2 - \overline{S'N}^2 = \text{const.}$$

Les points Q et P étant définis par les triangles semblables S'DQ et NBS', S'BP et MDS', *les triangles S'PQ et S'MN sont semblables*, avec le rapport de similitude  $\frac{DS'}{BN}$  ou  $\frac{BS'}{DM}$ , et la tige PQ maintient l'égalité des angles en D et B. Les projections du point S' sur MN, et, par suite, sur PQ, occupent des positions fixes sur ces droites quand on déforme le contour.

La propriété du dernier sommet S du contre-parallélogramme BS'DS, propriété signalée par Hart, donne lieu aux remarques suivantes (Note de M. Réveille) :

En raison de l'hypothèse

$$\frac{DS}{DM} = \frac{BS}{BN},$$

les triangles SDM et SBN sont semblables, le rapport  $\frac{SM}{SN}$  est constant, ce qui est un cas particulier de la relation linéaire entre  $\overline{SM}^2$  et  $\overline{SN}^2$ , et le point S reste à une distance constante d'un certain point A de la droite MN. Si l'on définit les points Q et P par les triangles SDQ et SBP semblables aux triangles MDS et NBS qui le sont déjà, le triangle SPQ est évidemment semblable au triangle SNM, et la longueur PQ est constante; on peut introduire une dernière tige SC.

Ce point S de la figure 12 est d'ailleurs celui que l'on obtient en supposant que, dans la dernière relation du n° 22, les deux membres sont nuls ( $\beta$  et  $\gamma$  sont ici négatifs). On a

$$\frac{\beta}{\delta} + \frac{b}{d} = 0, \quad \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{a}{c} = 0$$

ou encore

$$\frac{SB}{SD} = \frac{PN}{QM} = \frac{BN}{DM}, \quad \frac{SA}{SC} = \frac{MN}{PQ} = \frac{AM}{CQ};$$

comme les angles B et D sont égaux, ainsi que les angles A et C, le point S est à chaque instant centre de similitude des segments QM et PN, MN et QP. Les valeurs de  $h$  et  $g$  pour ce point S étant données par les équations

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = 0, \quad \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = 0,$$

la relation doublement quadratique entre  $g$  et  $h$  montre que la seconde valeur de  $g$  qui correspond à la valeur considérée de  $h$  est infinie; dans la déformation du contour MNPQ, les projections du point S' sur MN et PQ occupent donc des positions fixes sur ces droites. Le point S'', donné par le contre-parallélogramme ASCS'', joue un rôle analogue pour QM et PN. Si l'on se donne le contour MNPQ, on peut construire S' et S'' en construisant d'abord S.

26. La théorie de l'appareil général (*fig. 11*), faite par le calcul indépendamment de la tige SC, repose sur les deux relations suivantes où  $d'$  et  $b'$  désignent MD et NB :

$$b' \beta \cdot \overline{SM}^2 + d' \delta \cdot \overline{SN}^2 = (b' d' + \beta \delta) (b' \delta + d' \beta),$$

$$c^2 b'^2 d'^2 + a^2 b' \beta \cdot d' \delta = (b' \beta + d' \delta) (b' \beta \cdot \overline{SM}^2 + d' \delta \cdot \overline{SN}^2);$$

ou utilise pour la seconde l'égalité des angles  $\widehat{QSP}$  et  $\widehat{MSN}$ . En écartant le cas de l'appareil à ligne droite, pour lequel on suppose  $b' \beta + d' \delta = 0$ , on peut remplacer, dans chacune de ces relations, le binôme

en SM, SN, par

$$(b'\beta + d'\delta) \overline{SA}^2 + \frac{\alpha^2 b'\beta \cdot d'\delta}{b'\beta + d'\delta};$$

on obtient, d'une part, l'expression de SA, et l'on a, d'autre part, pour la longueur de la tige PQ

$$c = \frac{b'\beta + d'\delta}{b'd'} \times SA;$$

la figure 11 donne immédiatement ce résultat :

$$\frac{c}{\alpha} = \frac{QC}{\alpha} + \frac{CP}{\alpha} = \frac{\delta}{b'} + \frac{\beta}{d'}.$$

On peut écrire, dans tous les cas, et c'est en somme la première relation du n° 23,

$$c^2 b'd' + \alpha^2 \beta \delta = \left(1 + \frac{\beta \delta}{b'd'}\right) (b'\beta + d'\delta) (b'\delta + d'\beta);$$

$\beta$  et  $\delta$  sont échangeables, comme l'exige la substitution possible du point S' au point S; les deux membres sont nuls quand il s'agit du point S' de la figure 12 :

$$\frac{c}{\alpha} = \frac{\beta}{d'} = \frac{-\delta}{b'};$$

ils le sont également quand il s'agit du point S.

---