

MAURICE FRÉCHET

**Concours d'agrégation des sciences  
mathématiques en 1903 (mathématiques  
élémentaires)**

*Nouvelles annales de mathématiques* 4<sup>e</sup> série, tome 4  
(1904), p. 77-81

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__77_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---



---

**CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES  
EN 1903 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES);**

SOLUTION PAR M. MAURICE FRÉCHET.

---

*On donne deux droites fixes  $D$  et  $D'$  non situées dans un même plan, un point fixe  $A$  sur  $D$  et un point fixe  $A'$  sur  $D'$ . Soient  $(S)$  une sphère dont le centre est situé sur  $D$  et qui passe par  $A$ ,  $(S')$  une sphère dont le centre est situé sur  $D'$  et qui passe par  $A'$ .*

*1° Montrer qu'il existe deux sphères  $(S)$  tangentes à une sphère  $(S')$  supposée donnée.*

*2° Trouver les lieux géométriques des points de contact des sphères  $(S)$  et  $(S')$ , lorsqu'elles varient, tout en restant tangentes.*

*3° Soit  $M$  le point de contact d'une sphère  $(S)$  avec une sphère  $(S')$ . Sur la ligne des centres de ces deux sphères on porte, à partir du point  $M$ , une longueur constante  $MM' = a$ . Trouver le lieu du point  $M'$  lorsque les deux sphères varient.*

*4° Sur les droites  $D$  et  $D'$  on porte, à partir de  $A$  et  $A'$ , respectivement, deux longueurs égales  $AP$  et  $A'P'$ . Trouver le lieu du centre de la sphère  $\Sigma$  tangente à  $D$  en  $P$  et à  $D'$  en  $P'$ , lorsque  $P$  et  $P'$  décrivent respectivement  $D$  et  $D'$ .*

I. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  les centres respectifs des sphères  $S$  et  $S'$ . Nous allons d'abord chercher le centre radical commun aux deux faisceaux de sphères  $S$  et  $S'$ . Il se trouve nécessairement à l'intersection de leurs plans

radicaux, c'est-à-dire sur la droite  $\delta$  intersection des plans perpendiculaires, l'un à D en A et l'autre à D' en A'. Les points E de  $\delta$  ont tous la même puissance  $\overline{EA}^2$  par rapport aux sphères S et la même puissance  $\overline{EA'}^2$  par rapport aux sphères S'. Par conséquent, le point O de  $\delta$ , qui est équidistant des points A et A', a même puissance par rapport aux sphères S et S'.

*Ce point est unique et bien déterminé.* En effet, c'est l'intersection de la droite  $\delta$  avec le plan P perpendiculaire à AA' en son milieu. Or,  $\delta$  est parallèle à la perpendiculaire commune à D et D'. Par conséquent,  $\delta$  ne peut être ni parallèle à P, ni dans le plan P, sans quoi  $\delta$  serait perpendiculaire aux trois droites AA', D, D' et celles-ci se coupant en A et A' seraient dans un même plan. Or, on suppose que D et D' ne sont pas dans un même plan. Il résulte de ce fait que si M est le point de contact de deux sphères S et S' tangentes, leur plan tangent commun passe en O et l'on a

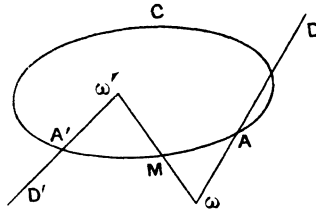
$$OA = OA' = OM.$$

Donc, si S et S' sont tangentes, la droite  $\omega\omega'$  est tangente en M à une sphère U de centre fixe O, tangente à D en A et à D' en A'.

II. On en déduit immédiatement le lieu du point M lorsque les sphères S et S' varient tout en restant en contact. Ce lieu est d'abord situé sur la sphère U. C'est le lieu du point de contact M d'une tangente à U,  $\omega\omega'$ , qui rencontre deux tangentes fixes de U : D et D'.

Ce lieu est formé de deux cercles passant en A et A'. En effet, soit C le cercle de la sphère U déterminé par les points A, A', M. Les tangentes  $\omega M$ ,  $\omega A$  à U sont égales; de même  $\omega'M = \omega'A'$ . Par conséquent, le

cercle  $C$ , qui passe par les deux extrémités  $A'M$  du triangle *isoscelé*  $\omega'A'M$ , fait un angle égal avec les deux côtés égaux  $\omega'A'$ ,  $\omega'M$ . Il en résulte que  $D$  et  $D'$  font respectivement avec le cercle  $C$  deux angles égaux à l'angle que fait  $\omega\omega'$  avec  $C$ . Par conséquent, *le cercle  $C$  est un cercle de la sphère  $U$  passant par  $A$  et  $A'$  et faisant avec  $D$  et  $D'$  deux angles égaux*. Il n'y a que deux cercles qui satisfassent à ces conditions. En effet, le plan du cercle  $C$  fera manifestement des angles égaux avec  $D$ ,  $\omega\omega'$  et  $D'$ . Or, on voit facilement qu'il ne peut en être ainsi que s'il est parallèle à l'une des deux



bissectrices  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  de l'angle formé par deux droites concourantes parallèles à  $D$  et  $D'$ .

Donc, le cercle  $C$  est dans un plan fixe passant par  $AA'$  et parallèle à  $\Delta_1$  ou  $\Delta_2$ .

En résumé, le lieu du point  $M$  est formé de deux cercles  $C$ ,  $C_1$  de la sphère  $U$ . Il résulte aussi de ce qui précède que les droites  $\omega\omega'$ , qui s'appuient par exemple sur  $C$ , font un angle constant avec le cercle  $C$  et avec son plan. On obtiendra toutes ces droites en faisant tourner l'une d'entre elles autour de l'axe  $L$  du cercle  $C$ . De même pour celles qui sont relatives au cercle  $C_1$ , d'axe  $L_1$ .

Enfin, nous devons observer que les sphères  $S$ ,  $S'$  restent tangentes de la même façon ( $S$  et  $S'$  extérieures l'une à l'autre ou  $S$  intérieure à  $S'$  ou  $S'$  intérieure à  $S$ )

lorsque  $M$  décrit l'un des arcs  $AA'$  de l'un des cercles  $C$  et  $C_1$ . Car, dans ce mouvement, les points  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $M$ , restant distincts, gardent la même disposition relative.

III. Si l'on se donne une sphère  $S'$ , il y a deux sphères  $S$  qui lui sont tangentes et l'on obtiendra les points de contact et les centres correspondants en menant du point  $\omega'$  les deux tangentes à  $U$  qui rencontrent  $D$ . Ces tangentes existent toujours, car  $\omega'$  est toujours extérieur à  $U$  (étant sur  $D$ ), et elles sont distinctes lorsque  $\omega'$  est distinct de  $A'$ . Enfin, si  $\omega'$  reste sur la même demi-droite  $A'D'$  portée par  $D'$  et terminée en  $A'$ , les points  $M$  correspondants restent sur les mêmes arcs  $AA'$  de  $C$  et de  $C_1$ .

Donc, les sphères  $S$  et  $S'$  restent tangentes de la même façon.

IV. Soit  $M'$  sur  $\omega\omega'$  tel que  $MM' = a$ . Lorsque  $M$  reste sur le cercle  $C$  on obtient toutes les positions de  $\omega\omega'$  par une rotation autour de l'axe  $L$  de  $C$ . Donc, le lieu de  $M'$  est un cercle ayant même axe que  $C$ . Comme il y a deux positions de  $M'$  sur  $\omega\omega'$  et deux cercles  $C$ ,  $C_1$ , le lieu de  $M'$  se composera de quatre cercles s'appuyant sur  $D$  et  $D'$  qui ont deux à deux même axe que  $C$  ou  $C_1$ .

On peut remarquer que les sphères de centres  $\omega$ ,  $\omega'$ , qui passent en  $M'$ , sont tangentes en ce point et passent par deux points fixes  $B$ ,  $B'$  sur  $D$ ,  $D'$  tels que

$$BA = a, \quad B'A' = a'.$$

Donc d'après II, si  $\Gamma$  est un des quatre cercles, lieux de  $M'$ , il coupe  $D$  et  $D'$  en des points tels que  $B$ ,  $B'$  à des distances égales à  $a$  de  $A$  et de  $A'$  respectivement.

( 81 )

De plus,  $\Gamma$  est sur une sphère  $V$  tangente à  $D$  en  $B$  et à  $D'$  en  $B'$ .

V. Soient  $P$  et  $P'$  sur  $D$  et  $D'$  tels que

$$PA = P'A'.$$

En prenant  $a = PA$ , il résulte de IV que la sphère  $\Sigma$  tangente à  $D$  en  $P$  et à  $D'$  en  $P'$  contient un cercle  $\Gamma$  ayant même axe  $L$  que  $C$  par exemple. Donc le centre  $\sigma$  de  $\Sigma$  est sur la droite fixe  $L$ . Comme il y a plusieurs dispositions relatives des points  $P$  et  $P'$ , nous voyons que le lieu du centre  $\sigma$  est formé de deux axes  $L$  et  $L_1$  des cercles  $C$  et  $C_1$ . D'ailleurs, on peut observer que ces axes sont concourants puisqu'ils sont dans le plan perpendiculaire au milieu de la corde  $AA'$  commune aux deux cercles  $C$  et  $C_1$ .

*Remarques :*

1° On aurait pu utiliser l'inversion dans la solution de ce problème. Par exemple, pour les deux premières questions, en plaçant le centre d'inversion en  $A$ .

2° On a pu observer que les droites  $\omega\omega'$  relatives à un cercle  $C$  engendrent un hyperboloïde de révolution d'axe  $L$  qui passe par  $C$ ,  $D$  et  $D'$  et qui est circonscrit à la sphère  $U$ . Cet hyperboloïde contient aussi deux des cercles lieux de  $M'$ . Il est circonscrit aux sphères  $\Sigma$  qui correspondent à l'axe  $L$ .

Il y a de même un hyperboloïde de révolution relatif au cercle  $C_1$ . Mais nous avons écarté l'emploi de ces hyperboloïdes pour notre solution élémentaire.