NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 573-576

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__573_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1996.

(1904, p 192.)

La caustique par réflexion d'une ellipse pour des rayons parallèles au grand axe est une sextique unicursale dont l'aire est

$$\frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a},$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soient $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de l'ellipse, m le coefficient angulaire du rayon réfléchi en ce point.

On détermine m en écrivant que la direction

$$b\cos\varphi.x + a\sin\varphi.y = 0$$

de la tangente à l'ellipse en M satisfait à l'équation

$$m(y^2 - x^2) + 2xy = 0$$

des bissectrices des droites

$$y = 0, \qquad y - mx = 0,$$

ce qui donne

$$m = \frac{2ab\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

L'équation du rayon réfléchi en M est donc

$$(1)\quad \begin{cases} 2ab\sin\varphi\cos\varphi.x + (a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)y \\ \qquad\qquad - b\sin\varphi(a^2 + c^2\cos\varphi) = 0. \end{cases}$$

Cette équation, jointe à celle obtenue en la dérivant par rapport à φ, détermine l'enveloppe cherchée. L'équation dérivée est

$$(2)\quad \begin{cases} 2ab(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)x + 2(a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi.y \\ \qquad\qquad - b\cos\varphi(a^2 + c^2 - 3c^2\sin^2\varphi) = 0. \end{cases}$$

(1) et (2) résolus, par rapport à x et y, donnent

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\cos\varphi}{2a}[3a^2-(a^2+b^2)\cos^2\varphi], \\ y = b\sin^3\varphi. \end{cases}$$

En remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs en fonction de $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, on voit que la courbe (3) est une sextique unicursale.

Calcul de l'aire :

$$\begin{aligned} S &= \frac{6b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi[b^2-(a^2+b^2)\sin^2\varphi]\,d\varphi \\ &= \frac{6b^3}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\varphi\,d\varphi - \frac{6b(a^2+b^2)}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6\varphi\,d\varphi. \end{aligned}$$

Posant

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\varphi\,d\varphi,$$

$$I' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6\varphi\,d\varphi,$$

on voit que

$$I' = I - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Intégrant par parties l'intégrale du second membre, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{5}I'.$$

Par suite

$$I' = \frac{5}{6}I,$$

et alors

$$(4)\qquad S = \frac{b(b^2-5a^2)}{a}I.$$

Or

$$\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = 1 - 4(1 - 2\cos^2\varphi) + 8\sin^4\varphi,$$

d'où

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

et

$$I = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)\,d\varphi = -\frac{3\pi}{16};$$

l'équation (4) donne alors

$$S = \frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a}.$$

C'est l'expression cherchée.

Les expressions (3) permettent de construire la courbe sans difficulté.

En éliminant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ entre ces deux équations et

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

on voit que l'équation cartésienne de la courbe est

$$\begin{aligned}
&27c^6(a^2+b^2)^3 b^2 y^4 \\
&\quad + [4a^2b^2x^2 + (a^2+b^2)^2y^2 - b^2(2a^2-b^2)^2]^3 \\
&\quad + 27c^2(a^2+b^2)(2a^2-b^2)b^4y^2 \\
&\qquad \times [4a^2b^2x^2 + (a^2+b^2)^2y^2 - b^2(2a^2-b^2)^2] \\
&\qquad\qquad - 27b^{10}(2a^2-b^2)^3y^2 = 0.
\end{aligned}$$

1997.

(1901, p. 240.)

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
&2^n \cos^n\frac{a}{2}\sin\left(x + n\frac{a}{2}\right) \\
&\quad = \sin x + C_n^1 \sin(x+a) + C_n^2\sin(x+2a) + \ldots \\
&\qquad + C_n^p \sin(x+pa) + \ldots + C_n^n \sin(x+na),
\end{aligned}$$

où C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n *sont les coefficients binomiaux.*

(C. BOURLET.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

De

$$\cos^n \frac{a}{2} = \frac{\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n}{2^n}$$

et

$$\sin\left(x + n\frac{a}{2}\right) = \frac{e^{ix} e^{in\frac{a}{2}} - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}}}{2i},$$

on tire

$$\begin{aligned}
&2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{ix} e^{in\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}(1 + e^{ia})^n - e^{-ix}(1 + e^{-ia})^n\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} e^{ix}\,(1 + C_n^1 e^{ia} + C_n^2 e^{2ia} + \ldots + C_n^p e^{pia} + \ldots + C_n^n e^{nia}) \\ -e^{-ix}(1 + C_n^1 e^{-ia} + C_n^2 e^{-2ia} + \ldots + C_n^p e^{-pia} + \ldots + C_n^n e^{-nia}) \end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} (e^{ix} - e^{-ix}) + C_n^1(e^{i(x+a)} - e^{-i(x+a)}) + C_n^2(e^{i(x+2a)} - e^{-i(x+2a)}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C_n^p(e^{i(x+pa)} - e^{-i(x+pa)}) + \ldots + C_n^n(e^{i(x+na)} - e^{-i(x+na)}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}
&2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)\\
&\quad = \sin x + C_n^1 \sin(x + a) + C_n^2 \sin(x + 2a) + \ldots\\
&\qquad + C_n^p \sin(x + pa) + \ldots + C_n^n \sin(x + na).
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.