Certificats de calcul différentiel et calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 568-572

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__568_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$I = \int (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy,$$

prise le long d'une courbe (C) *partant de l'origine des coordonnées et aboutissant au point* (x, y); z *désigne une fonction de* x *et* y.

Déterminer la fonction z *la plus générale telle que l'intégrale* I *ne dépende pas de la courbe* (C), *mais seulement de son extrémité* (x, y). *Déterminer, en particulier, parmi toutes ces fonctions, celle qui se réduit à* y^2 *pour* $x = 0$. *Calculer la valeur de l'intégrale curviligne* I *correspondante.*

II. *On considère en coordonnées rectangulaires la surface dont l'équation est*

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}.$$

Calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des xy *à l'intérieur de la courbe dont* *l'équation en coordonnées polaires rapportée à* Ox *comme axe polaire est*

$$r = a\sqrt{\cos\theta}.$$

III. *On considère la surface représentée par l'équation*

$$zx^2 - py^2 = 0, \tag{1}$$

où p est une constante.

1° *Déterminer sur cette surface le lieu des points où la normale fait un angle donné avec* Oz.

2° *Déterminer sur la surface une courbe telle qu'en chacun de ses points le plan formé par la tangente à la courbe et la normale à la surface soit parallèle à* Oz.

3° *Trajectoires orthogonales aux surfaces représentées par l'équation* (1) *quand p varie.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}} \qquad \textit{pour} \qquad \varphi = 32^\circ 46'.$$

(Novembre 1904.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Trouver toutes les surfaces telles que le plan tangent en chaque point* M *rencontre un axe* OZ *en un point équidistant du point de contact* M *et d'un point fixe* O *pris sur* OZ.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(x + 15y)\,dx + (2y - 15x)\,dy = 0,$$

en employant un facteur intégrant.

(Novembre 1904.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Sur la normale principale, en chaque point* M *d'une hélice circulaire* S, *et dans le sens de la concavité, on porte une longueur constante* $MM_1 = l$ *et l'on considère la courbe* S_1, *lieu du point* M_1.

On demande de déterminer l de façon que les courbes S *et* S_1 *jouissent de l'une des quatre propriétés suivantes :*

1° *Les courbes* S *et* S_1 *ont même courbure;*

2° *Elles ont même torsion absolue;*

3° *Les tangentes* MT *et* M_1T_1 *aux points correspondants sont rectangulaires;*

4° *La tangente* M_1T_1 *à* S_1 *en* M_1 *est parallèle à la binormale* MH *à la courbe* S *en* M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$2x^3\,dy = y^3\,dx + 3x^2y\,dx.$$

2° *Intégrer l'équation*

$$x(x^2+y^2)p + 2y^2(px+qy-z) = 0,$$

et déterminer une surface intégrale passant par le cercle

$$x^2+y^2 = R^2, \qquad z = c.$$

(Juillet 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné un système de deux équations différentielles du premier ordre*

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y,z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x,y,z),$$

énoncer et démontrer le théorème fondamental de Cauchy, relatif à l'existence des intégrales de ce système.

Qu'entend-on par INTÉGRALE GÉNÉRALE *et par* INTÉGRALE PREMIÈRE *du système* (A)?

II. *Soit* $y = \varphi(x, C)$ *l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 + ay + b = 0,$$

où a *et* b *sont des fonctions de* x. *Démontrer que l'on a, quelle que soit la constante* C,

$$\int \varphi(x, C)\,dx = -\frac{1}{2}\log\frac{\partial\varphi}{\partial C} - \frac{1}{2}\int a\,dx.$$

APPLICATION. — *Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales particulières de l'équation* (1); *en déduire une formule donnant l'intégrale générale de l'équation linéaire*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a\frac{dz}{dx} + bz = 0. \tag{2}$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit* R *le quadrilatère curviligne* ABCD, *limité par les arcs* AB, BC, CD, DA *appartenant respectivement à quatre paraboles* P_1, P_2, P_3, P_4 *ayant pour foyer l'origine et représentées en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$(P_1) \qquad y^2 - 4x - 4 = 0,$$

$$(P_2) \qquad y^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$(P_3) \qquad y^2 + 6x - 9 = 0,$$

$$(P_4) \qquad y^2 + 4x - 4 = 0.$$

On demande de calculer l'intégrale double

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}$$

étendue à la région R.

N. B. — *On peut, par exemple, remplacer l'intégrale double par une intégrale curviligne, ou employer le changement de variables défini par les formules*

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv.$$

(Octobre 1904.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déterminer la fonction $f(x, y)$ de manière que, en éliminant α et β de l'équation*

$$z = \alpha x + \beta y + f(x, y),$$

on obtienne

$$z = px + qy + f(x, y).$$

II. *Trouver l'équation aux dérivées partielles du second ordre, indépendante des constantes α et β de la fonction* F *à laquelle satisfait la fonction z définie par*

$$z = \alpha x + \beta y + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. *Trouver la surface* S *la plus générale satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles*

$$z = px + qy + a\frac{y}{x},$$

et déterminer la surface particulière Σ *contenant la courbe*

$$z = 0, \qquad x^3 + y^3 + 3axy = 0.$$

IV. *Chercher les projections sur le plan* xOy *des lignes asymptotiques de la surface* S *et de la surface* Σ.

V. *Dans ce dernier cas on obtient des lignes droites et des coniques. Déterminer le cercle osculateur à l'une de ces coniques, le point de contact étant l'origine des coordonnées.*

Épreuve pratique. — I. *A tout point* (x, y) *du plan correspondent* λ, μ, *de façon que l'on ait*

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1; \qquad \frac{x^2}{a^2-\mu} + \frac{y^2}{b^2-\mu} = 1 \qquad (a^2 > b^2).$$

Entre quelles limites sont, en général, λ *et* μ?

Entre quelles limites varient λ *et* μ *quand le point* (x, y) *est à l'intérieur de l'ellipse* E *ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. *Transformer l'intégrale double*

$$\int\int F(x, y)\,dx\,dy$$

en prenant pour variables indépendantes λ *et* μ.

III. *Comme application, calculer l'intégrale*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 - 4(a^2-b^2)x^2}}$$

étendue à tous les points intérieurs à l'ellipse E.

(Juillet 1904.)