Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d’analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 565-568

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__565_1>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne une équation irréductible* $F(z, u) = 0$, F *étant un polynome entier en* z *et* u, *de degré* m *par rapport à* u. *Soit* T *la surface de Riemann correspondante, qui sera supposée à connexion multiple.*

1° *Trouver l'expression du genre* p *de cette surface;*

2° *Transformer* T *en une surface simplement connexe à l'aide de* $2p$ *coupures;*

3° *Soit*

$$v = \int_{z_0, u_0}^{z, u} \varphi(z, u)\, dz$$

une intégrale abélienne quelconque attachée à la relation donnée; trouver les diverses valeurs que prend cette intégrale lorsque, les deux points (z_0, u_0) *et* (z, u) *restant fixes, on fait varier le chemin d'intégration sur la surface* T; *définir les modules de périodicité de l'intégrale* v.

ÉPREUVE PRATIQUE. — z *et* u *étant liés par la relation*

$$u^2 = z^4 - 1,$$

on considère la fonction rationnelle de z *et de* u

$$v = \frac{1}{u} \frac{u + \sqrt{15}}{z - 2};$$

on demande de la représenter par une somme d'intégrales de première et de deuxième espèces, c'est-à-dire de la décomposer en éléments simples.

(Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soit* $f(z, u) = 0$ *une équation irréductible qui définit* u *comme fonction algébrique de* z, $F(z, u)$ *désignant un polynome de degré* m *en* z *et* u. *On suppose que les* m *directions asymptotiques de la courbe représentée sont distinctes et qu'aucune n'est parallèle à l'axe des* u; *on suppose de plus que la courbe n'a d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes :*

1° *Trouver l'expression générale des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe;*

2° *Démontrer que le nombre de ces intégrales qui sont linéairement indépendantes est égal au genre* p;

3° *Définir les intégrales normales de première espèce; montrer qu'elles sont au nombre de* p *distinctes, établir la propriété de leurs modules de périodicité relatifs aux coupures* b *de la surface de Riemann.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne l'equation*

$$u^3 - 3u + 2z(z-2) = 0,$$

qui définit u *comme fonction algébrique de* z:

1° *Trouver les points singuliers de la fonction* u;

2° *Déterminer la forme des développements de ses branches dans le domaine de chacun de ces points;*

3° *Calculer les premiers coefficients de chacun de ces développements.* (Novembre 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnée la fonction* pu, *d'invariants* $4a^2$ *et* 0, *on considère les courbes* (C) *définies par*

$$x = \frac{1}{pu - pa}, \qquad y = \frac{p'u}{pu - pa},$$

pa *étant réel :*

1° *Indiquer sommairement les différentes formes des courbes* (C).

2° *Points d'inflexion d'une courbe* (C); *réalité; équation donnant les valeurs de* pu, u *étant l'argument d'un point d'inflexion; montrer que le lieu des points d'inflexion, quand* a *varie, se compose de droites.*

3° *Asymptotes d'une courbe* (C); *à quelle condition doit satisfaire* $p\,a$ *pour que les asymptotes soient d'inflexion? Pour combien de courbes* (C) *a-t-on des asymptotes réelles?*

4° M *étant un point d'argument* u *d'une courbe* (C), *on considère l'aire balayée par* OM *lorsque* u *varie de zéro à une limite réelle* u : *méthode pour calculer cette aire lorsque* a *est une demi-période. Calcul de cette aire pour* a *quelconque.*

5° *L'aire obtenue étant représentée par* $\varphi(u)$, *pour quelle valeur de* a *la fonction* $\varphi(u)$ *est-elle uniforme? Pôles de* $\varphi(u)$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, les coordonnées d'un point variable de la courbe*

$$xy^2 + 3x^3 - y^2 - 2x^2 - 5x = 0,$$

en se servant successivement des notations de Weierstrass et de Jacobi. Cette courbe comprend un ovale : aire de cet ovale. (Juillet 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \ldots, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + \ldots,$$

où les seconds membres sont des séries entières à coefficients réels en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et où les termes non écrits sont de degrés supérieurs à* UN, *qu'entend-on en disant que la position* $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ *est* STABLE *ou* INSTABLE? *Montrer que, si les* λ *sont tous négatifs, il y a stabilité et que, au contraire, il y a instabilité si, parmi les* λ, *il en est de positifs.*

II. *On considère l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(y) = \int_0^y f(x)\,\psi(x, y)\,dx,$$

où $\varphi(y)$ *et* $\psi(x, y)$ *sont des fonctions continues, données* *quand x et y varient de* o *à* a, *et où l'on suppose* $\varphi(0) = 0$. *Montrer qu'il existe une fonction* $f(x)$ *continue de* o *à* a *et une seule, satisfaisant à cette équation fonctionnelle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de trouver le volume limité par la surface fermée*

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

On se servira, pour faire le calcul, des coordonnées polaires de l'espace. (Octobre 1904.)