

A. VACQUANT

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1904). Solution de la question
de mathématiques spéciales**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 494-505

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__494_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1904).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre par le plan. Trouver la courbe C, lieu géométrique de ce sommet quand λ varie, a et b restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.

2° On considère la courbe particulière C' obtenue en posant

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de λ qui correspondent aux points de rencontre de C' avec un plan arbitraire?

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° Démontrer que, par toute droite tangente en un point A à C' , on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que A ; réalité de ces plans.

Les plans bitangents à la courbe C' se partagent en deux familles; démontrer que les plans de l'une des familles sont tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.

1. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre

$$y^2 - 2px = 0$$

par le plan P

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Le point S sera sommet de la parabole si la tangente ST en ce point est perpendiculaire au diamètre SM de la parabole. Les équations de ST et de SM sont respectivement

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0,$$

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0$$

et

$$y - y_0 = 0,$$

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Les paramètres directeurs de ST sont

$$-y_0, \quad -p, \quad -p(b + a\lambda) + \lambda y_0;$$

ceux de SM sont

$$-1, 0, \lambda.$$

Pour que ces deux droites soient perpendiculaires, il faut

$$y_0 + \lambda[\lambda y_0 - p(b + a\lambda)] = 0.$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont définies par les équations suivantes, dans lesquelles on a enlevé l'indice 0 :

$$(1) \quad \begin{cases} y(1 + \lambda^2) - p\lambda(b + a\lambda) = 0, \\ z - by + \lambda(x - ay) = 0, \\ y^2 - 2px = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} y &= \frac{p\lambda(b + a\lambda)}{1 + \lambda^2}, \\ x &= \frac{y^2}{2p} = \frac{p\lambda^2(b + a\lambda)^2}{2(1 + \lambda^2)^2}, \\ z &= by - \lambda\left(\frac{y^2}{2p} - ay\right) = y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda y}{2p}\right), \\ z &= y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda^2(b + a\lambda)}{2(1 + \lambda^2)}\right), \\ z &= \frac{p\lambda(b + a\lambda)^2(2 + \lambda^2)}{2(1 + \lambda^2)^2}. \end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont donc

$$(C) \quad \begin{cases} x = \frac{p\lambda^2(b + a\lambda)^2}{2(1 + \lambda^2)^2}, \\ y = \frac{p\lambda(b + a\lambda)}{1 + \lambda^2} = \frac{2p\lambda(b + a\lambda)(1 + \lambda^2)}{2(1 + \lambda^2)^2}, \\ z = \frac{p\lambda(b + a\lambda)^2(2 + \lambda^2)}{2(1 + \lambda^2)^2}. \end{cases}$$

Quand λ varie, a et b restant fixes, ces équations montrent que S décrit une courbe unicursale C d'ordre 5.

Si l'on élimine λ entre les deux premières équations (1), on obtient l'équation

$$(S_3) \begin{cases} y[(x-ay)^2 + (z-by)^2] \\ + p(z-by)[b(x-ay) - a(z-by)] = 0, \end{cases}$$

représentant une surface réglée du troisième ordre S_3 admettant pour droite double la droite D

$$\begin{cases} z - by = 0, \\ x - ay = 0, \end{cases}$$

autour de laquelle tournent les plans P, et pour génératrice la droite, parallèle au plan zOx , définie par les deux premières équations (1). S_3 est donc un conoïde d'axe D, de plan directeur zOx . La surface S_3 et le cylindre parabolique ont en commun la droite de l'infini du plan zOx , et le reste de l'intersection est la courbe C.

La droite double D de S_3 rencontre le cylindre au point O et en un deuxième point O'; les points O et O' sont, par suite, points doubles de C. Les coordonnées de O' sont

$$x = \imath a^2 p, \quad y = \imath ap, \quad z = \imath abp.$$

On peut retrouver ces points doubles à l'aide des équations (C). En effet, on a le même point O pour les valeurs différentes $\lambda = 0$, $\lambda = -\frac{b}{a}$ du paramètre λ , et l'on a le point O' pour les valeurs de λ , racines de l'équation

$$\imath ap = \frac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2}$$

ou

$$a(\imath + \lambda^2) = b\lambda.$$

Pour ces valeurs, x et z prennent les mêmes valeurs $\imath a^2 p$ et $\imath abp$. Le point double O' ne correspond à des

branches réelles que si l'on a

$$b^2 - 8a^2 \geq 0.$$

Si l'on considère le cône Γ de sommet O , de directrice C , il sera du troisième ordre, car tout plan mené par le point double O de C coupe cette courbe en trois autres points et, par suite, coupe Γ suivant trois génératrices. De même, le cône Γ' , ayant pour sommet le deuxième point double O' et pour directrice C , est du troisième ordre.

L'équation du cône Γ s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation (S_3) , y par $\frac{2px}{y}$; d'où

$$(\Gamma) \left\{ \begin{array}{l} 2x[(x - ay)^2 + (z - by)^2] \\ + y(z - by)[b(x - ay) - a(z - by)] = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} x - 2a^2p &= X, \\ y - 2ap &= Y, \\ z - 2abp &= Z, \end{aligned}$$

les équations (1) s'écrivent

$$(1') \left\{ \begin{array}{l} (Y + 2ap)(1 + \lambda^2) - p\lambda(b + a\lambda) = 0, \\ Z - bY + \lambda(X - aY) = 0, \\ (Y + 2ap)^2 - 2p(X + 2a^2p) = 0. \end{array} \right.$$

En faisant une combinaison linéaire et homogène en X, Y avec la première et la troisième de ces équations, puis, remplaçant, dans l'équation obtenue, λ par sa valeur tirée de la deuxième, on obtient l'équation du cône Γ' , savoir :

$$(\Gamma') \left\{ \begin{array}{l} 2(X - aY)[(X - aY)^2 + (Z - bY)^2] \\ + Y(Z - bY)[b(X - aY) - a(Z - bY)] = 0. \end{array} \right.$$

Les deux cônes Γ et Γ' admettent pour génératrice double la droite D .

2. Si l'on suppose $a = 1$, $b = 0$, les équations (C) deviennent

$$(C') \quad \begin{cases} x = \frac{p\lambda^4}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ y = \frac{p\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{2p\lambda^2(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ z = \frac{p\lambda^2(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}. \end{cases}$$

Elles définissent une courbe C' de cinquième ordre et unicursale. Les valeurs du paramètre λ correspondant aux points d'intersection de C' avec un plan quelconque

$$ux + vy + wz + h = 0$$

sont les racines de l'équation du cinquième degré

$$pu\lambda^4 + 2pv\lambda^2(1+\lambda^2) + pw\lambda^3(2+\lambda^2) + 2h(1+\lambda^2)^2 = 0$$

ou

$$pw\lambda^5 + (pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2pw\lambda^3 + (2pv + 4h)\lambda^2 + 2h = 0.$$

En désignant les racines par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ et posant

$$S_1 = \Sigma \lambda_1, \quad S_2 = \Sigma \lambda_1 \lambda_2, \quad \dots,$$

on a les relations

$$(2) \quad \begin{cases} S_1 pw + pu + 2pv + 2h = 0, \\ S_2 pw - 2pw = 0, \\ S_3 pw + 2pv + 4h = 0, \\ S_4 pw = 0, \\ S_5 pw + 2h = 0. \end{cases}$$

La deuxième et la quatrième de ces relations, savoir

$$\begin{aligned} pw(S_2 - 2) &= 0, \\ pw S_4 &= 0, \end{aligned}$$

équivalent, en supposant $\omega \neq 0$, aux relations

$$S_2 - 2 = 0,$$

$$S_4 = 0;$$

ce sont les relations demandées, le plan (u, v, ω, h) étant quelconque.

Si $\omega = 0$, le plan donné est parallèle à Oz et les valeurs de λ correspondant aux points d'intersection de ce plan avec C' sont racines de l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

et les valeurs de λ sont deux à deux égales et de signes contraires.

Les relations

$$S_2 - 2 = 0,$$

$$S_4 = 0$$

peuvent s'écrire

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 (\lambda_4 + \lambda_5)$$

$$+ \lambda_2 (\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_3 (\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4 \lambda_5 - 2 = 0,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_4 \lambda_5 + \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 + \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 = 0.$$

Si le plan sécant est osculateur à C' en un point de paramètre λ , on aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda,$$

et les relations deviennent

$$3\lambda^2 + 3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4 \lambda_5 - 2 = 0,$$

$$\lambda^3(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda^2 \lambda_4 \lambda_5 = 0$$

ou

$$3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4 \lambda_5 + 3\lambda^2 - 2 = 0,$$

$$\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda_4 \lambda_5 = 0.$$

De ces équations linéaires en $\lambda_4 + \lambda_5$ et $\lambda_4 \lambda_5$, on

déduit

$$\lambda_4 + \lambda_5 = \frac{3(2 - 3\lambda^2)}{8\lambda},$$

$$\lambda_4 \lambda_5 = \frac{3\lambda^2 - 2}{8}.$$

Les valeurs λ_4, λ_5 correspondant aux points de rencontre d'un plan osculateur λ avec la courbe C' sont donc racines de l'équation

$$u^2 + \frac{3(3\lambda^2 - 2)}{8\lambda}u + \frac{3\lambda^2 - 2}{8} = 0.$$

Elles sont réelles si

$$\frac{9(3\lambda^2 - 2)^2}{64\lambda^2} - \frac{4(3\lambda^2 - 2)}{8} \geq 0$$

ou

$$(3\lambda^2 - 2)[9(3\lambda^2 - 2) - 32\lambda^2] \geq 0,$$

$$(3\lambda^2 - 2)(-5\lambda^2 - 18) \geq 0,$$

ou

$$3\lambda^2 - 2 \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq \lambda \leq +\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. Soient λ le paramètre du point de contact A, μ celui du deuxième point de contact B et λ_5 celui du troisième point de rencontre E d'un plan bitangent à C' avec la courbe C' . On aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \mu,$$

et les relations trouvées précédemment deviennent

$$\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 = 0,$$

$$\lambda\mu[\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu)] = 0.$$

La solution

$$\mu = 0, \quad \lambda_5 = \frac{2 - \lambda^2}{2\lambda}$$

donne le plan mené par la tangente en A à C' et le point double O ; cette solution est singulière. Restent les solutions définies par les relations

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 &= 0, \\ \lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) &= 0.\end{aligned}$$

En éliminant λ_5 on a l'équation en μ

$$\mu^2 + 3\lambda\mu + \lambda^2 - 2 = 0,$$

qui a toujours ses racines réelles, car on a

$$9\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 2) = 5\lambda^2 + 8 > 0.$$

Il faut maintenant examiner le cas où le plan mené par la tangente en A à C' est parallèle à Oz , c'est-à-dire où $w = 0$. Ce plan sera bitangent à C' si l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

donnant les λ des points de rencontre de ce plan avec C', a deux racines doubles, ce qui exige

$$(pv + 2h)^2 - 2h(pu + 2pv + 2h) = 0$$

ou

$$pv^2 - 2hu = 0,$$

équation qui exprime que le plan (u, v, o, h) , bitangent à C', est tangent au cylindre parabolique.

Ce résultat s'apercevait sur les équations (1), car, γ étant donné, il lui correspond deux valeurs de λ et, par suite, deux points de C situés sur la génératrice du cylindre parabolique définie par cette valeur de γ ; en ces deux points, le plan tangent au cylindre le long de cette génératrice est tangent à C. La même propriété existe pour la courbe C'.

Les plans bitangents à C' forment donc deux familles ;

l'une se compose des plans tangents au cylindre et l'autre famille est telle que, par toute tangente à C' , il passe deux de ces plans; d'ailleurs les plans de la seconde famille enveloppent une surface développable, car leurs coordonnées (u, v, ω, h) sont liées par deux relations qu'on obtiendrait en éliminant λ, μ et λ_5 entre les cinq équations (2). Cette surface développable a pour directrices la courbe C' et une surface qui sera du second ordre, puisque par toute droite tangente à C' on peut mener deux plans tangents à cette surface.

On peut trouver l'équation tangentielle de cette quadrique de la manière suivante.

Dans le cas actuel les équations (2) deviennent

$$\begin{aligned} [2(\lambda + \mu) + \lambda_5] p\omega + pu + 2pv + 2h &= 0, \\ [\lambda_5(\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu) + 2\lambda\mu(\lambda + \mu)] p\omega + 2pv + 4h &= 0, \\ \lambda^2\mu^2\lambda_5 p\omega + 2h &= 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 &= 0, \\ [\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu)] \lambda\mu &= 0. \end{aligned}$$

En éliminant λ_5 entre ces équations on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)^2 + \lambda\mu - 2 &= 0, \\ [4(\lambda + \mu)^2 - \lambda\mu] p\omega + 2(p\lambda + 2pv + 2h)(\lambda + \mu) &= 0, \\ [-\lambda\mu(\lambda\mu + 2) + 4\lambda\mu(\lambda + \mu)^2] p\omega + 2(2pv + 4h)(\lambda + \mu) &= 0, \\ -\lambda^3\mu^3 p\omega + 4h(\lambda + \mu) &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant $(\lambda + \mu)^2$ par $2 - \lambda\mu$ et en résolvant les trois dernières équations par rapport à u, v, ω , on trouve

$$\begin{aligned} u &= \frac{u}{2\lambda^3\mu^3 - 10\lambda^2\mu^2 + 22\lambda\mu - 16} \\ &= \frac{v}{-2\lambda^3\mu^3 + 5\lambda^2\mu^2 - 6\lambda\mu} = \frac{\omega}{4(\lambda + \mu)} = \frac{h}{p\lambda^4\mu^3}, \end{aligned}$$

de sorte que, en posant

$$\lambda\mu = \alpha,$$

on peut prendre pour nouvelles coordonnées homogènes d'un plan bitangent à C' , de la deuxième famille, les quantités (u, v, w, h) définies par

$$\begin{aligned} h &= p\alpha^3, \\ u &= 2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16, \\ v &= -2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha, \\ w^2 &= 16(2 - \alpha). \end{aligned}$$

On a ainsi une représentation paramétrique de la surface développable engendrée par les plans bitangents à C' de la seconde famille. D'ailleurs sur les équations (C') on voit que la courbe C' est symétrique par rapport au plan $z = 0$; par suite si (u, v, w, h) est une solution de l'équation de la quadrique cherchée, $(u, v, -w, h)$ en est une autre; l'équation de cette quadrique ne contiendra pas de termes en w . Donc, si l'on considère les équations

$$\begin{aligned} h^2 &= p^2\alpha^6, \\ u^2 &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)^2, \\ v^2 &= (-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha)^2, \\ w^2 &= 16(2 - \alpha), \\ uh &= p\alpha^3(2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16), \\ vh &= p\alpha^3(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha), \\ uv &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha), \end{aligned}$$

on doit pouvoir déterminer les multiplicateurs m_1, m_2, \dots, m_6 de façon à obtenir, quel que soit α , l'équation

$$\frac{h^2}{p^2} + m_1 u^2 + m_2 v^2 + m_3 w^2 + m_4 u \frac{h}{p} + m_5 v \frac{h}{p} + m_6 uv = 0.$$

En annulant les coefficients de $\alpha^6, \alpha^5, \dots, \alpha$ dans le second membre de la combinaison linéaire à établir, on obtient six équations linéaires pour déterminer les mul-

tiplicateurs. On trouve ainsi par un calcul facile mais assez long

$$m_1 = \frac{1}{7}, \quad m_2 = \frac{13}{7}, \quad m_3 = -\frac{8}{7},$$

$$m_4 = -\frac{9}{14}, \quad m_5 = \frac{15}{7}, \quad m_6 = \frac{6}{7}.$$

Il faut ensuite vérifier que le terme indépendant de α dans la combinaison linéaire est nul, c'est-à-dire il faut vérifier l'égalité

$$16^2 m_1 + 32 m_3 = 0$$

ou

$$16^2 - 32 \times 8 = 0,$$

ce qui est.

L'équation tangentielle de la quadrique demandée est

$$u^2 + 13v^2 - 8w^2 + 6uv + \frac{h}{p} \left(-\frac{9}{7}u + 15v \right) + \frac{h^2}{p^2} = 0;$$

elle représente une surface à centre unique qui est un hyperboloïde à deux nappes, car l'équation s'écrit

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2} \left(-\frac{9}{7}u + 15v \right) \right]^2$$

$$- \frac{1}{4} \left(-\frac{9}{7}u + 15v \right)^2 + u^2 + 13v^2 - 8w^2 + 6uv = 0$$

ou

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2} \left(-\frac{9}{7}u + 15v \right) \right]^2 + \frac{115}{14^2} u^2 + \frac{219}{14} uv - \frac{173}{4} v^2 - 8w^2 = 0,$$

équation de la forme

$$A^2 + B^2 - k^2 v^2 - 8w^2 = 0,$$

B désignant une fonction linéaire en u et v , et k un coefficient numérique.