NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CH. BIOCHE

Sur la distinction analytique des régions déterminées par un triangle ou par un tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 492-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__492_0>

[K1, K13]

SUR LA DISTINCTION ANALYTIQUE DES RÉGIONS DÉTERMINÉES PAR UN TRIANGLE OU PAR UN TÉTRAÈDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

Étant données les équations des côtés d'un triangle il est facile de former les équations qui déterminent les centres des cercles tangents aux trois côtés. J'ai été conduit à chercher comment on pouvait distinguer les équations qui correspondent au centre du cercle *inscrit*, ou celles qui correspondent au centre d'un cercle *exinscrit* déterminé. Le caractère que j'ai obtenu est assez simple et me semble tout au moins peu connu.

Je me sers de cette remarque évidente que le centre de gravité est dans la région *intérieure;* or si les équations des côtés du triangle sont

$$D_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$D_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$
$$D_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 = 0,$$

et si l'on désigne par δ_1, δ_2, δ_3 les déterminants mineurs qui multiplient c_1, c_2 et c_3 dans le développement de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$\Delta = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3,$$

les équations qui déterminent le centre de gravité peuvent s'écrire

$$D_1\delta_1 = D_2\delta_2 = D_3\delta_3.$$

On voit alors que dans la région *intérieure* D_1, D_2, D_3 prennent les signes de δ_1, δ_2, δ_3 ou ceux de $-\delta_1$, $-\delta_2$, $-\delta_3$.

Si l'on désigne par ε_1, ε_2, ε_3 des nombres algébriques ayant pour valeur absolue 1 et ayant les signes de δ_1, δ_2, δ_3, les équations qui déterminent le centre du cercle *inscrit* sont

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{D_2}{\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{D_3}{\varepsilon_3\sqrt{a_3^2+b_3^2}};$$

le centre du cercle exinscrit situé, par rapport à D_1, du côté où n'est pas le sommet opposé à D_1, est donné par

$$\frac{D_1}{-\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{D_2}{\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{D_3}{\varepsilon_3\sqrt{a_3^2+b_3^2}}.$$

Plus généralement, il est facile d'obtenir, connaissant les signes de δ_1, δ_2, δ_3, le système des signes que prennent D_1, D_2, D_3 dans une région déterminée.

Il est naturel de se poser, pour le tétraèdre, des questions analogues aux précédentes. Si les faces du tétraèdre sont données par des équations

$$P_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \delta_1 d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3 + \delta_4 d_4,$$

on voit facilement que le centre de gravité est donné par les équations

$$P_1\delta_1 = P_2\delta_2 = P_3\delta_3 = P_4\delta_4,$$

et la considération des signes de δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 permet de distinguer les systèmes de signes que prennent P_1, P_2, P_3, P_4 dans les différentes régions déterminées dans l'espace par les faces du tétraèdre.