

Certificats de calcul différentiel et calcul intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 467-470

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__467_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET CALCUL INTÉGRAL.**

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés, dans un plan P, un point fixe et une droite fixe DD' :*

1° On demande de déterminer les courbes C du plan P telles que la distance MQ d'un point quelconque M de l'une de ces courbes à la droite fixe DD' soit égale à la distance OR du point fixe O à la tangente en M à la courbe C.

2° Par un point A du plan P il passe en général deux courbes de cette espèce, tangentes en ce point A à deux droites distinctes At, A't'. Trouver le lieu géométrique des points A pour lesquels ces deux droites At, A't' sont confondues et étudier la forme des courbes C correspondantes dans le voisinage du point A.

N. B. — On prendra pour origine le point O, l'axe Oy étant parallèle à la droite DD'.

II. Démontrer que l'équation différentielle linéaire

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - (x + \mu + \gamma) \frac{dy}{dx} + \mu y = 0,$$

où μ et γ sont deux nombres entiers positifs, admet pour intégrale un polynôme $y = P(x)$. En déduire qu'elle admet une seconde intégrale de la forme

$$y = e^x Q(x),$$

Q(x) étant aussi un polynôme.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale curviligne

$$\int \frac{[x \log(x^2 + y^2) - x^2 y^2] dx + [y \log(x^2 + y^2) + x^3] dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

prise le long du chemin AMNP, joignant le point A, de coordonnées $x = 1, y = 0$, au point P de coordonnées X, Y en contournant une fois l'origine, le point P étant situé dans l'angle xOy . (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étant donné, dans un plan P, un axe Ox, on demande de déterminer dans ce plan une courbe C, passant par le point O, telle que l'aire engendrée par la rotation d'un arc OM de cette courbe autour de Ox soit dans un rapport constant avec l'aire engendrée par la rotation de la tangente MT autour du même axe.

Examiner en particulier le cas où $k = \frac{4}{3}$.

II. Trouver la valeur finale de la fonction

$$u = \text{arc tang } \sqrt{1 - z}$$

de la variable complexe z , lorsque cette variable décrit le segment de ligne droite allant du point $z = 0$ au point $z = 1 + \sqrt{-1}$, la valeur initiale de u étant égale à $\frac{\pi}{4}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x(1-x)}}.$$

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On demande l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2).$$

Soit S la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant une intégrale de l'équation (1). Déterminer la fonction arbitraire qui figure dans cette intégrale, de façon que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface S et trouver la seconde famille de lignes asymptotiques.

Les surfaces Σ ainsi obtenues dépendent d'une constante arbitraire. Trouver l'équation générale des surfaces qui les coupent orthogonalement.

II. On considère la fonction de deux variables complexes

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x^2 + y^2 + 3}.$$

Soient x_0, y_0 deux nombres RÉELS quelconques. On demande de trouver une limite supérieure du module de $f(x, y)$ lorsque les variables x et y restent comprises respectivement à l'intérieur de deux cercles C et C' de rayon égal à 1 décrits des points x_0 et y_0 pour centres, dans le plan de chacune de ces variables.

Quelles conclusions peut-on déduire de ce calcul, relativement aux intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x^2 + y^2 + 3}$$

qui sont réelles pour des valeurs réelles de la variable?

(470)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Juillet 1904.)