Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'analyse supérieure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 463-466

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__463_0>

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x et y dans une certaine région du plan où va rester le point (x, y); de plus, dans cette région, c est négatif.

Démontrer qu'il ne peut y avoir DEUX *intégrales de l'équation précédente prenant sur une courbe fermée* C *une succession de valeurs données et étant continues à l'intérieur de* C *ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres.*

II. *Soit l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=cu, \tag{1}$$

où c est une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de $x=0$, $y=0$. Montrer que l'équation précédente admet des intégrales de la forme

$$\mathrm{P}(x, y)\log(x^2+y^2)+\mathrm{Q}(x, y), \tag{2}$$

où P *et* Q *sont holomorphes autour de l'origine, et où* $\mathrm{P}(0, 0)$ *a une valeur donnée g.*

Dans quel problème de la Théorie de la chaleur rencontre-t-on l'équation (1) *avec c positif? Quelle est l'interprétation physique des singularités correspondant à la forme* (2)?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u,$$

trouver l'intégrale de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à UN *et qui, pour $y = 0$, se réduit à* UN.

Cette intégrale se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de x et de y. Il faut trouver la loi des coefficients de cette série. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant considérée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + d,$$

où les coefficients a, b, c, d sont holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, démontrer qu'il existe une intégrale z de cette équation déterminée par les conditions suivantes : on a

$$z = f(x) \quad \textit{pour} \quad y = 0,$$
$$z = \varphi(y) \quad \textit{pour} \quad x = 0,$$

f et φ étant deux fonctions données, respectivement holomorphes autour de $x = 0$ et de $y = 0$. On suppose d'ailleurs $f(0) = \varphi(0)$.

II. *Étant donné un contour fermé* C, *qu'appelle-t-on* FONCTION DE GREEN

$$G(x, y;\, a, b)$$

relative à l'aire limitée par ce contour et au point (a, b)?

Enoncer les propriétés fondamentales de cette fonction et s'en servir pour trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

s'annulant sur C *et continue à l'intérieur; la fonction $f(x, y)$ est une fonction donnée de x et de y.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2},$$

a désignant une constante positive supérieure à UN.

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation différentielle (tous les éléments étant réels)*

$$(1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une série ordonnée suivant les puissances de x et y, pour $x = y = 0$, ne contenant pas de terme du premier degré en y, et convergeant pour $|x|$ et $|y|$ assez petits.

1° *Montrer que l'intégrale de l'équation* (1), *passant par un point (x_0, y_0) suffisamment rapproché de l'origine, et pour lequel $x_0 > 0$,* PASSE PAR L'ORIGINE.

2° *Montrer qu'à gauche de l'axe Oy il n'y a qu'*UNE SEULE INTÉGRALE PASSANT A L'ORIGINE.

II. *Établir que la transformation*

$$z = \frac{1}{x}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

entre les deux plans z et t transforme une circonférence du plan t, ayant l'origine pour centre, en une ellipse du plan z, ayant pour foyers les points $+1$ et -1.

En déduire qu'une fonction $f(x)$ de la variable complexe x, holomorphe à l'intérieur d'une ellipse ayant pour foyers les points ± 1, peut être développée en une série de la forme

$$f(x) = \Sigma a_n P_n(x),$$

les a_n étant des constantes et $P_n(x)$ le polynome

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation*

$$(1) \qquad x \log x = a,$$

où a est une constante comprise entre 0 *et $-\frac{1}{e}$, $\log x$ désignant le logarithme népérien de x et e étant la base de ce système de logarithmes.*

1° *Démontrer que l'équation* (1) *a deux racines réelles.*

2° *On fait les approximations successives*

$$x_1 = -a, \qquad x_2 = \frac{a}{\log x_1}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{a}{\log x_{n-1}}, \qquad \ldots.$$

Montrer que les quantités positives x vont en diminuant. Quelle relation leur limite a-t-elle avec l'équation (1)?

(Juillet 1904.)