

## Certificats de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 4 (1904), p. 43-48

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1904\\_4\\_4\\_43\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_43_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.**

---

**Rennes.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer le théorème général relatif à la somme des moments des quantités de mouvement d'un système de points libres soit par rapport à un point, soit par rapport à un axe.*

## II. En les supposant liés par quelque condition

$$f(x, y, z, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

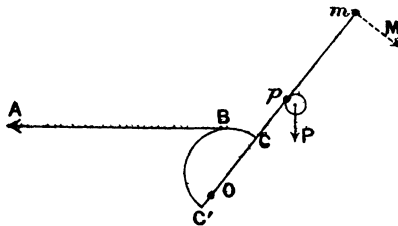
que doit être le premier membre  $f$  pour que les forces de liaison n'influent pas sur la somme des moments par rapport à l'axe coordonné  $Ox$  ?

**PROBLÈME.** — Un fil flexible et inextensible prend pour figure d'équilibre un arc de la courbe  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  limité à la circonférence concentrique à cette courbe dont le rayon est  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . La force qui agit sur lui émane de ce centre.

Quelle en est la loi en fonction de la distance  $r$  ? Trouver également l'expression de la tension en chaque point du fil, soit en fonction de  $r$ , soit en fonction de l'arc  $s$  compté à partir du sommet.

Quelles sont les forces à appliquer aux extrémités pour retenir ces points et obtenir effectivement l'équilibre ?

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — On veut au moyen d'un long fil métallique CBA transmettre à un objet éloigné A une force horizontale constante T. Dans ce but on fixe l'une C des extrémités de ce fil sur le contour CBC', après quoi il

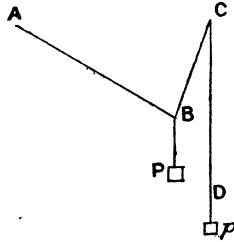


s'en détache tangentiellement de B jusqu'à l'objet A. La plaque verticale CBC' est évidée intérieurement de façon que son poids soit négligeable. Elle est liée à un levier, mobile dans le plan vertical autour du point O, qui porte en  $p$  un contrepois P et sur la manette duquel agit en  $m$ , perpendiculairement à  $Om$ , la force M développée par la manœuvre. On donne les forces T, P, M, et les dis-

tances  $Op = p$ ,  $Om = m$ . Quelle forme faut-il donner au profil inconnu de la plaque pour que la force  $M$  soit constante en toute position du système? (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étude du pendule de Foucault.

II. Une tige rigide  $AB$  de masse négligeable, mobile autour de son extrémité  $A$ , supporte à l'autre extrémité  $B$  un poids  $P$ . Un fil flexible, inextensible et sans masse,  $BCD$ , est attaché en  $B$  à la tige, passe sur une très petite poulie  $C$  et retombe verticalement en  $D$  en supportant un autre poids  $p$ . Le point  $C$  est situé dans le plan horizontal



du point  $A$  et la distance  $AC$  est égale à la longueur de la tige.

À l'instant initial, le système est au repos; le point  $B$  maintenu en  $C$ . On l'abandonne à lui-même; examiner s'il se produit un mouvement, l'étudier quand il a lieu.

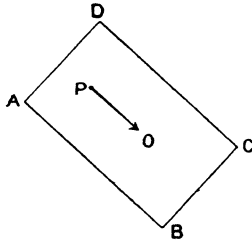
(Novembre 1902.)

### Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Étudier le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse de la cinquième puissance de la distance : forme générale de la trajectoire, détermination des coordonnées du point mobile en fonction du temps, cas particulier où les données initiales sont telles qu'on peut effectuer les intégrations au moyen des fonctions élémentaires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une plaque rectangulaire  $ABCD$ ,

homogène, pesante, de centre  $O$ , est mobile autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la plaque qu'il perce en un point  $P$ . La droite  $PO$  est parallèle au côté  $AB$  du



rectangle, et l'on a

$$AB = 0^m, 40, \quad OP = 0^m, 15.$$

Calculer le second côté  $BC$  du rectangle, par la condition que ce pendule batte la seconde dans le vide.

L'accélération de la pesanteur est de  $9^m, 81$  par seconde.

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étudier le mouvement d'une sphère pesante, homogène, parfaitement polie, assujettie à se mouvoir sur la surface interne d'un cylindre circulaire droit, parfaitement poli, dont l'axe est horizontal. On supposera que, à l'instant initial, la sphère est en contact avec la génératrice la plus basse du cylindre et que le point de contact est animé d'une vitesse  $v_0$  faisant avec la génératrice un angle  $\alpha$ . Calculer la réaction du cylindre.

On examinera les diverses circonstances de ce mouvement, en particulier le cas où la sphère atteindra ou n'atteindra pas la génératrice supérieure du cylindre.

On donne le rayon de la sphère  $a$ , celui du cylindre  $a+b$  et la masse de la sphère.

II. Démontrer que, dans le mouvement général d'un corps solide entièrement libre dans l'espace, le lieu des points pour lesquels l'accélération centripète est nulle ou dont les trajectoires ont une inflexion en ces points est une cubique gauche.

ÉPREUVE PRATIQUE. — II. Calculer l'attraction exercée par

un cône circulaire droit homogène sur un point placé à son sommet. On supposera l'attraction proportionnelle à la  $n^{\text{ième}}$  puissance de la distance. Pour quelles valeurs de  $n$  l'attraction est-elle finie ou infinie ?

Cas particulier de l'attraction newtonienne.

On donne la hauteur du cône  $h$ , l'angle au sommet  $2\alpha$  et la densité  $\rho$ .

Généralement, l'attraction d'un corps quelconque sur un point de sa surface étant proportionnelle à la  $n^{\text{ième}}$  puissance de la distance, pour quelles valeurs de  $n$  l'attraction sera-t-elle finie ou infinie ? On supposera que la surface limitant le corps est telle que les rayons vecteurs menés du point attiré ne rencontrent cette surface qu'en un seul point.

(Juillet 1902.)

#### Caen.

Un disque circulaire, homogène, très mince, posé sur un plan horizontal  $H$ , peut tourner autour de son centre  $O$ , qui est fixe. En un point de la circonférence est attachée une extrémité d'un fil, de masse négligeable, qui s'enroule sur le disque et se termine par un point  $M$  de masse  $m$ . La masse du disque est  $6m$  : chacun de ses éléments exerce sur  $M$  une répulsion proportionnelle à la masse de l'élément et à sa distance à  $M$ . A l'instant initial,  $M$  est sur la circonférence du disque et le système en repos : déterminer le mouvement qu'il va prendre, le fil se déroulant sur le point  $H$  : trajectoire du point  $M$ . On néglige toute résistance passive.

#### SOLUTION.

Supposons qu'à l'instant initial la masse  $m$  ait été sur  $O$  en coïncidence avec un point du disque qui, à l'instant  $t$ , vient en  $A$  : au même instant, le fil se détache du disque en un point  $B$  tel que  $BM = \text{arc}AB$  : soient  $AOB = \theta$ ,  $AOX = \varphi$ ,  $\varphi$  compté en sens contraire de  $\theta$ . La droite  $BM$ , égale à  $R\theta$ , fait avec  $OX$  l'angle  $\theta - \varphi - \frac{\pi}{2}$  et la vitesse de  $M$  peut être regardée comme résultant de la vitesse  $R\varphi'$  suivant  $BM$  et  $R\theta(\theta - \varphi')$  perpendiculaire. La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à  $O$  reste nulle et l'on a

$$mR^2\theta^2(\theta' - \varphi') - 4mR^2\varphi' = 0, \quad \frac{\theta - \varphi}{2} = \text{arc tang } \frac{\theta}{2}.$$

( 48 )

Les coordonnées de M sont

$$x = R[\cos(\theta - \varphi) + \theta \sin(\theta - \varphi)] = R \frac{3\theta^2 + 4}{\theta^2 + 4},$$

$$y = R[\sin(\theta - \varphi) - \theta \cos(\theta - \varphi)] = \frac{R\theta^2}{\theta^2 + 4} :$$

M décrit la cissoïde

$$y^2 = \frac{(x - R)^3}{3\lambda - x}.$$

L'intégrale des forces vives est de la forme

$$m R^2 [\theta^2 (\theta' - \varphi')^2 + \varphi'^2] + 3 m R^2 \varphi'^2 = m \lambda^2 R^2 \theta^2,$$

d'où  $\theta = e^{\frac{\lambda t}{2}} - e^{-\frac{\lambda t}{2}}$  croît indéfiniment, tandis que  $\theta - \varphi$  tend vers  $\pi$ .  
(Juillet 1903.)