

G. FONTENÉ

**Contours variables inscrits à une
cubique gauche, circonscrits par les
plans de leurs angles à une surface
réglée du troisième ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 439-447

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_439_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[M³5, M²3]

**CONTOURS VARIABLES INSCRITS A UNE CUBIQUE GAUCHE,
CIRCONSCRITS PAR LES PLANS DE LEURS ANGLES A UNE
SURFACE RÉGLÉE DU TROISIÈME ORDRE;**

PAR M. G. FONTENÉ.

Si l'on cherche un polygone de n côtés inscrit à une courbe gauche donnée et circonscrit par les plans de ses angles à une surface donnée, le problème est en

général déterminé; le théorème que l'on trouvera au n° 7 a donc un caractère paradoxal.

I.

1. Soit une cubique gauche Γ donnée par les formules

$$(1) \quad x = \lambda^3, \quad y = \lambda^2, \quad z = \lambda, \quad t = 1.$$

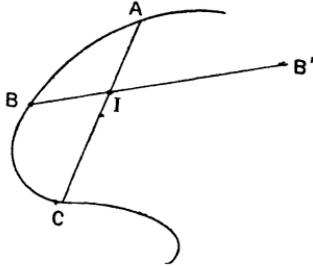
Considérons les plans b , en nombre doublement infini, qui coupent la cubique en trois points A, B, C dont les paramètres α, β, γ vérifient la relation triplement linéaire, symétrique en α et γ ,

$$(2) \quad A\alpha\gamma.\beta + B(\alpha + \gamma)\beta + B'\alpha\gamma + C\beta + C'(\alpha + \gamma) + D = 0;$$

l'enveloppe de ces plans est une surface de troisième classe. En effet, soient P et Q deux points de la cubique; comme le plan b n'a en commun avec la courbe que les points A, B, C, si l'on considère un plan b passant par PQ, les points P et Q (dans cet ordre) sont pour ce plan les points A et B, ou les points B et A, ou les points extrêmes A et C; la relation (2) étant triplement linéaire, il existe un seul plan b passant par PQ tel que P et Q soient A et B pour ce plan, . . . ; l'enveloppe du plan b est donc une surface de troisième classe, deux des plans tangents qui passent par une corde PQ de la cubique étant de même nature, le dernier étant d'une nature spéciale (relativement à PQ).

2. Cette surface est réglée et contient la cubique. En effet, si l'on se donne β , on a entre α et γ une relation involutive; le point B étant donné, il y a donc

involution entre A et C sur la cubique, de sorte que les cordes AC sont les génératrices d'un même système d'une quadrique passant par la cubique; parmi les génératrices de l'autre système, une passe en B, soit BB'; comme BB' rencontre les cordes AC relatives au point B,



on voit que tout plan mené par BB' est un plan tangent à la surface enveloppe considérée, de sorte que cette droite est une génératrice de cette surface.

3. Il est facile de voir géométriquement que toute surface réglée du troisième ordre passant par la cubique détermine par ses plans tangents trois points A, B, C de la courbe liés par une relation de la forme (2). Une telle surface doit donc dépendre de cinq paramètres, comme la relation (2), et c'est ce que l'on peut vérifier par le calcul suivant. (Les nos 3 et 4 peuvent être laissés de côté.)

L'équation d'une surface réglée du troisième ordre est de la forme

$$\begin{aligned} & (x - fy + gz - ht)^2 (x - ly + mz - nt) \\ & = k(x - f'y + g'z - h't)^2 (x - l'y + m'z - n't); \end{aligned}$$

et cette surface contient la cubique si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} & (\lambda^3 - f\lambda^2 + \dots)^2 (\lambda^3 - l\lambda^2 + \dots) \\ & \equiv k(\lambda^3 - f'\lambda^2 + \dots)^2 (\lambda^3 - l'\lambda^2 + \dots). \end{aligned}$$

Il faut d'abord $k = 1$. Si l'on désigne par $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, a', b', c', \dots$ les racines des quatre polynômes en λ , on doit avoir

$$\begin{aligned} & (\lambda - a)^2 (\lambda - b)^2 (\lambda - c)^2 (\lambda - \alpha) (\lambda - \beta) (\lambda - \gamma) \\ & \equiv (\lambda - a')^2 (\lambda - b')^2 (\lambda - c')^2 (\lambda - \alpha') (\lambda - \beta') (\lambda - \gamma'); \end{aligned}$$

on ne peut pas supposer $a = a', b = b', c = c', \dots$, et il faut prendre

$$\alpha' = \gamma' = b, \quad \alpha = \gamma = b', \quad a' = a, \quad c' = c, \quad \beta' = \beta;$$

les quatre polynômes en λ sont donc, en remplaçant β par d ,

$$\begin{aligned} & (\lambda - b) (\lambda^2 - p\lambda + q), \quad (\lambda - b')^2 (\lambda - d), \\ & (\lambda - b') (\lambda^2 - p\lambda + q), \quad (\lambda - b)^2 (\lambda - d); \end{aligned}$$

l'équation de la surface est, avec cinq paramètres,

$$\begin{aligned} & [x - (b + p)y + (bp + q)z - bq.t]^2 \\ & \quad \times [x - (2b' + d)y + (b'^2 + 2b'd)z - b'^2.d.t] \\ & = [x - (b' + p)y + (b'p + q)z - b'q.t]^2 \\ & \quad \times [x - (2b + d)y + (b^2 + 2bd)z - b^2.d.t] = 0. \end{aligned}$$

4. Si l'on veut pousser le calcul jusqu'à la relation (2), on observera qu'une génératrice de la surface est, avec les premières notations,

$$\begin{aligned} x - fy + gz - ht &= \theta(x - f'y + g'z - h't), \\ \theta^2(x - ly + mz - nt) &= x - l'y + m'z - n't; \end{aligned}$$

elle s'appuie sur la cubique en un point B dont le paramètre β est donné par la relation

$$\beta - b = \theta(\beta - b');$$

les équations de la génératrice deviennent

$$\begin{aligned} (\beta - b') (x - fy + gz - ht) &= (\beta - b) (x - f'y + g'z - h't), \\ (\beta - b)^2 (x - ly + mz - nt) &= (\beta - b')^2 (x - l'y + m'z - n't); \end{aligned}$$

en tenant compte des valeurs de f, g, \dots , on obtient, après suppression du facteur $b - b'$,

$$\begin{aligned} x - (\beta + p)y + (p\beta + q)z - q\beta \cdot t = 0, \\ [2\beta - (b + b')]x \\ - [2\beta^2 + 2d\beta - 2bb' - d(b + b')]y \\ + [(b + b' + 2d)\beta^2 - 2bb'\beta - 2bb'd]z \\ - d[(b + b')\beta^2 - 2bb'\beta]t = 0. \end{aligned}$$

On aura alors la relation entre les paramètres α, β, γ des points A, B, C, déterminés sur la cubique par un plan tangent à la surface, en écrivant que le plan

$$x - (\alpha + \gamma + \beta)y + (\beta\alpha + \beta\gamma + \alpha\gamma)z - \alpha\gamma\beta \cdot t = 0$$

contient la droite précédente. Comme il contient déjà le point B, de coordonnées $\beta^3, \beta^2, \beta, 1$, il suffira d'écrire que sa trace sur le plan $z = 0$ contient la trace de la droite sur le même plan; on a ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + \gamma + \beta & \alpha\gamma\beta \\ 1 & \beta + p & q\beta \\ 2\beta - (b + b') & 2\beta^2 + 2d\beta - 2bb' - d(b + b') & d[(b + b')\beta^2 - 2bb'\beta] \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant la dernière colonne par β , et retranchant de la seconde la première multipliée par β , on a

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha + \gamma & \alpha\gamma \\ 1 & p & q \\ 2\beta - (b + b') & (2d + b + b')\beta - 2bb' - d(b + b') & d[(b + b')\beta - 2bb'] \end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est triplement linéaire en α, β, γ , symétrique en α et γ .

équations données (multipliée par $\sin h$) si l'on a

$$m = \sin h, \quad \text{ou} \quad \sin(n-1)h + \sin h = 0,$$

$$\text{ou} \quad \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{(n-2)h}{2} = 0;$$

$$n = -2 \sin h \cos h, \quad \text{ou} \quad \sin(n-2)h + \sin 2h = 0,$$

$$\text{ou} \quad \sin \frac{nh}{2} \cos \frac{(n-4)h}{2} = 0;$$

$$k' = k \sin h, \quad \text{ou} \quad \sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n-3)h}{2} = 0;$$

en écartant la solution étrangère $h = (2k+1)\pi$, qui se présente pour n impair, on a la solution véritable

$$\sin \frac{nh}{2} = 0, \quad h = \frac{2k\pi}{n}.$$

6. THÉORÈME. — *Les n équations*

$$(5) \quad \begin{cases} A\alpha\beta\gamma + B\beta(\alpha + \gamma) + B'\alpha\gamma + C\beta + C'(\alpha + \gamma) + D = 0, \\ A\beta\gamma\delta + B\gamma(\beta + \delta) + \dots = 0, \\ \dots = 0, \\ A\tau\alpha\beta + B\alpha(\tau + \beta) + \dots = 0, \end{cases}$$

triplement linéaires, semi-symétriques, se réduisent à $n-2$ équations distinctes sous une condition unique.

Elles renferment alors quatre paramètres arbitraires.

On passe, en effet, des équations (3) aux équations (5) par la substitution

$$\alpha = \frac{p\alpha' + q}{r\alpha' + s}, \quad \beta = \frac{p\beta' + q}{r\beta' + s}, \quad \dots,$$

et inversement.

III.

7. THÉORÈME. — SOUS UNE CONDITION UNIQUE, il existe en nombre doublement infini des contours polygonaux de n côtés $ABC\dots T$, inscrits à une cubique gauche Γ , et tels que les plans a, b, c, \dots, t de leurs angles soient tangents à une surface réglée de troisième classe, donc de troisième ordre, passant par la cubique; par chaque point B de la courbe passe une génératrice BB' de la surface, et les plans ABC , en nombre simplement infini, qui passent en B contiennent la droite BB' .

La cubique étant donnée, la surface dépend de quatre paramètres.

Considérons un contour polygonal de n côtés $ABC\dots T$, inscrit à la cubique (1), et supposons que les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ du paramètre λ aux sommets de ce contour sont assujetties à vérifier les n relations (5), dans le cas où ces relations se réduisent à $n - 2$ relations distinctes; le contour est variable avec deux paramètres, et, d'après ce qu'on a vu au début, l'enveloppe des plans a, b, c, \dots, t des angles du contour est une surface réglée de troisième ordre passant par la cubique.

Je rappelle que la diagonale AC , par exemple, rencontre la génératrice BB' .

Inversement, la cubique étant toujours donnée, la surface réglée du troisième ordre qui passe par la cubique est seulement astreinte à vérifier une condition de fermeture, variable avec le nombre n des côtés du contour, et cette surface dépend alors de quatre paramètres.

IV.

8. J'ai montré précédemment qu'il peut exister en nombre doublement infini des tétraèdres, des octaèdres, des icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique.

Avec des tétraèdres, on a des contours quadrangulaires $ABCD$, $ABDC$, $ACBD$, inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique, avec deux paramètres.

Avec des octaèdres, les diagonales étant AA' , BB' , CC' , si l'on supprime par exemple les six arêtes BC , CA , AB et $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, on a des contours hexagonaux $AB'CA'BC'$, etc.

Avec des icosaèdres, les diagonales étant OO' , AA' , ..., EE' , si l'on supprime les vingt arêtes OA , ..., OE , $O'A'$, ..., $O'E'$, AB , ..., EA , $A'B'$, ..., $E'A'$, on a des contours décagonaux $AD'BE'CA'DB'EC'$, etc.

Hors de ces cas singuliers, si un contour polygonal doublement variable est inscrit à une cubique gauche, je ne crois pas qu'il puisse être circonscrit à une quadrique par les plans de ses angles. En effet, toute corde BC de la cubique fait partie d'au moins un contour $ABCDE...$ de l'espèce indiquée, ce qui donne au moins deux plans ABC , BCD , passant par BC et tangents à l'enveloppe des plans des angles du contour; en outre, il existe au moins un contour ... BMC ... pour lequel les sommets B et C sont séparés par un autre; donc, à moins que le point M ne soit A ou D , l'enveloppe est au moins de troisième classe. Or il ne semble pas que M puisse être A ou D si le contour n'est pas emprunté à un polyèdre à faces triangulaires, inscrit à la cubique et circonscrit à la quadrique.
