NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 4 (1904), p. 413-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4__413_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque infiniment mince, homogène et pesante, ayant la forme d'un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur* $2\sqrt{3}$, *s'appuie par le côté* BC *sur un plan horizontal fixe sur lequel elle peut glisser sans frottement. Cette plaque étant verticale et immobile, on lui applique en un point* D *une percussion d'intensité égale à* $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *et normale à son plan.*

1° *Trouver le mouvement initial de la plaque; reconnaître si elle continue à s'appuyer sur le plan horizontal fixe. Peut-on choisir le point* D *de manière que le mouvement initial de la plaque soit une rotation autour de* BC?

2° *Le point* D *étant quelconque, étudier le mouvement de la plaque après l'effet de la percussion. Peut-on choisir le point* D *de manière que le côté* BC *reste parallèle à lui-même?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la pression de l'eau sur une porte d'écluse verticale et rectangulaire en supposant qu'en amont l'eau affleure au côté supérieur* AB *et en aval au côté inférieur* DC. *Déterminer la position du centre de pression. On donnera la pression en kilogrammes dans le cas où* AB = 3^m *et* AD = 4^m. (Juillet 1904.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Équations d'équilibre d'un fil non pesant dont chaque élément ds est repoussé de l'axe* OX *par une force égale au quotient de ds par le carré de sa distance à* OX. *Dire dans quel cas la tension est constante et quelle est alors la courbe funiculaire. Enfin, en supposant le fil contenu dans le plan* XOY, *déterminer la courbe qu'il dessine dans le cas particulier où son équation est algébrique.*

SOLUTION.

$$d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0, \qquad d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} + \frac{y\,ds}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} + \frac{z\,ds}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

T est constant si le fil est sur un cylindre de révolution autour de OX : il a alors la forme d'une hélice. Enfin, si z est nul, on a

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{a}, \qquad d\frac{1}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{ds}{y^2} = 0.$$

En faisant $\dfrac{dy}{dx} = y'$, $ds = \dfrac{dy}{y'}\sqrt{1+y'^2}$, on trouve aisément

$$dx = \frac{\mathrm{C}\,y\,dy}{\sqrt{a^2(\mathrm{C}-y)^2 - \mathrm{C}^2y^2}};$$

l'intégrale n'est algébrique que pour $\mathrm{C} = a$:

$$dx = \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - 2ay}}.$$

II. *A une sphère pesante et homogène, pouvant pivoter autour d'un point* O *de sa surface, est liée une tige* DH *dirigée suivant le prolongement du diamètre* OD *qui part du point fixe* O; *une circonférence* S *peut tourner librement autour d'un de ses diamètres* PP′ *qui est vertical, fixe, ayant son milieu en* O; *le point* H *est assujetti à glisser sur* S *avec une vitesse constante. A l'instant initial, l'angle* POH *est droit, la circonférence* S *immobile, la sphère animée d'une rotation donnée autour de* OH. *Déterminer le mouvement du système en négligeant les masses de* DH *et de* S.

SOLUTION.

Prenant trois axes fixes dont l'un, OZ_1, est dirigé suivant OP, on déterminera la position de la sphère à l'aide des trois angles d'Euler; θ, égal à POH, a pour valeur $\frac{\pi}{2}+at$. On a pour la force vive

$$2T = \frac{7}{5}MR^2(\alpha^2 + \psi'^2\cos^2\alpha t) + \frac{2}{5}MR^2(\varphi' - \psi'\sin\alpha t)^2.$$

L'ordonnée du centre de gravité étant $-R\sin\alpha t$, le travail virtuel du poids, aussi bien que celui des forces de liaison, est nul; les deux équations de Lagrange sont extrêmement simples et l'on a tout de suite les intégrales premières

$$\varphi' - \psi'\sin\alpha t = \omega, \qquad 7\psi'\cos^2\alpha t - 2\omega\sin\alpha t = 0,$$

eu égard aux conditions initiales. Il est facile d'avoir les intégrales finies, et, si l'on veut, les forces de liaison.

(Juillet 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE : CINÉMATIQUE. — *L'extrémité* A *d'une barre rectiligne* AB *décrit un cercle d'un mouvement uniforme, tandis que son extrémité* B *décrit le prolongement d'un diamètre* Ox *de ce cercle. Étudier la distribution des accélérations des divers points de la barre* AB *à un instant donné.*

DYNAMIQUE. — *Mouvement d'une toupie dont la pointe* *repose sans frottement sur un plan horizontal. On ne considérera que le cas où, à l'instant initial, la vitesse du centre de gravité est nulle et la toupie animée d'une rotation autour de son axe de figure. On se bornera à établir les équations qui définissent le mouvement et à ramener leur intégration aux quadratures.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre très mince* AB, *homogène et pesante, de masse* M, *de longueur* $2l$, *mobile sans frottement dans un plan horizontal, est d'abord en repos. Une bille de dimensions très petites et de masse* 3M, *lancée dans le même plan, vient choquer la barre perpendiculairement à sa direction, avec une vitesse* V_0 *en un point* P *tel que* $AP = \frac{AB}{6}\cdot$ *La barre et la bille sont supposées parfaitement élastiques.*

1° *Montrer qu'après le choc le centre de gravité de la barre et la bille prennent des vitesses équipollentes, et déterminer la vitesse de rotation de la barre autour de son milieu.*

2° *Dans leur mouvement ultérieur, la barre et la sphère viennent à nouveau se choquer. Calculer le temps qui sépare les deux chocs et montrer que la barre, après ce choc, est ramenée au repos.*

3° *La bille, continuant son mouvement, vient choquer une nouvelle barre* CD *identique à la première, mobile dans le même plan autour de son extrémité* D, *mais d'abord en repos, la figure* ABCD *étant un rectangle. Tandis que la bille cheminait entre les deux barres, on a réuni les extrémités* C *et* A *par un fil inextensible et sans masse, de longueur égale à l'écartement des deux barres. Déterminer le régime des vitesses des deux barres après le choc et la tension de percussion du fil.*

(Juillet 1904.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère deux tiges,* AB *et* CD, *homogènes de même longueur* $2a$, *et de même poids* mg. *La première est horizontale et peut tourner librement autour de la verticale* Az; *la seconde se meut de telle façon que son extrémité* C *glisse sur la verticale* Az, *tan-*

dis que l'extrémité D *s'appuie sur la tige horizontale* AB. *Il n'y a pas de frottement. Étudier le mouvement du système.*

Examiner en particulier le cas où le point C *reste immobile et celui où il effectue des oscillations infinitésimales.*

On désignera par φ *l'angle* ACB *et par* θ *l'angle azimutal du plan* zAB.

II. *L'accélération dans le mouvement relatif.*

Remarque. — Le problème I ne présente pas de difficulté. Le théorème des forces vives et celui des aires permettent de ramener l'intégration à des quadratures, et la discussion est analogue à celle de plusieurs questions classiques de la Mécanique rationnelle (pendule sphérique, etc.).

La recherche de l'équilibre relatif de la tige CD dans le plan zAB et l'étude des oscillations infinitésimales correspondantes peuvent être comparées aux questions analogues relatives au régulateur de Watt.

Epreuve pratique. — *Sur un cylindre de révolution à génératrices horizontales, on pose en équilibre une règle rectangulaire homogène d'épaisseur négligeable et d'une longueur de* $0^{m},48$. *Cette règle, légèrement dérangée de sa position d'équilibre, fait de petites oscillations dont la période est de* $1^{s},25$. *On suppose qu'il n'y a pas de glissement, que le frottement de roulement est nul, et que la règle reste perpendiculaire aux génératrices du cylindre. On demande de trouver le rayon de ce cylindre sachant que l'on a* $g = 9^{m},81$.

Remarque. — Entre le rayon du cylindre a, la longueur l de la règle et la période t de l'oscillation, on trouve la relation

$$t^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{3ga}.$$

(Juillet 1904.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — I. *Étude cinématique du mouvement d'un système invariable qui a un point fixe.*

II. *Un disque matériel homogène, de rayon* r *et d'épaisseur infiniment petite, glisse sans frottement dans un* *plan fixe. Il est animé, à l'instant* $t = 0$, *d'une rotation* ω_0 *autour de son centre.*

Quelle force faut-il faire agir, à partir de cet instant, dans le plan du disque, sur un point A *de sa circonférence, pour que ce point* A *prenne un mouvement rectiligne et uniforme ?*

Quel est alors le mouvement du disque?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le centre de gravité du solide engendré par la rotation d'un secteur de cercle autour de l'un de ses rayons extrêmes :*

Rayon du cercle	$a = 0^m,580$
Angle d'ouverture...........	$\alpha = 31°6'23''$

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Mouvement d'un point pesant qui glisse avec frottement sur un plan incliné.*

On adoptera les notations suivantes :

O, *position initiale du mobile;*
Ox, *horizontale du plan;*
Oy, *ligne de plus grande pente dans le sens des cotes croissantes;*
α, *angle du plan avec le plan horizontal;*
f, *coefficient de frottement.*

On demande de calculer les coordonnées (x, y) *du mobile* M *au temps* t *et le temps* t *lui-même au moyen de la variable auxiliaire* $v = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, *où* θ *désigne l'angle de* Oy *avec la tangente en* M *à la trajectoire.*

Discuter les diverses phases du mouvement en faisant varier f.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un système articulé formé de deux barres égales* OA, O'A' *pouvant tourner respectivement autour des points fixes* O, O' *et réunies par une barre* AA' *de longueur constante.*

Dans la position initiale du système les barres OA_0, $O'A'_0$ *sont parallèles et dirigées en sens contraire. Soient* I_0 *le milieu de* $A_0A'_0$ *et* I_0x *et* I_0y *des axes rectangulaires, tels que* I_0x *soit parallèle à* OA_0 : *les éléments numériques du système sont les coordonnées* (m, n) *du point* O *et la lon-*

gueur a de OA_0. *Ces éléments sont choisis de telle sorte que, dans la position finale du système,* OA *ayant tourné d'un angle* $\alpha = A_1OA_0$, *l'autre barre* O'A' *a tourné du même angle* α.

Soient alors, dans une position intermédiaire quelconque, θ *et* θ' *les angles* AOA_0 *et* $A'O'A'_0$; *on demande, en supposant que* α *et* t *sont des quantités très petites et du même ordre de grandeur dont on négligera les puissances supérieures à la quatrième :*

1° *Les valeurs approchées de la différence* $\theta' - \theta$ *et des coordonnées* (x, y) *du milieu* I *de* AA', *exprimées avec* n, a, α, θ;

2° *La construction et les propriétés du lieu approché du point* I. (Novembre 1903.)

Lyon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soient* α *et* β *deux barres horizontales, parallèles, infiniment minces, placées à même hauteur. Un corps* S, *solide et pesant, repose sur* α *et* β *par deux surfaces cylindriques* A *et* B *qui ont même axe* ω *de révolution, horizontal, perpendiculaire à* α *et* β, *et un rayon* R. *Le plan mené par* ω *et par le centre de gravité* G *de* S *fait l'angle* θ_0 *avec la verticale. On imprime à* S *une vitesse initiale de translation parallèle aux barres.*

Quel sera le mouvement ultérieur? Tenir compte du frottement, dont on supposera le coefficient égal pour A *et* B. (Novembre 1903.)

Bordeaux.

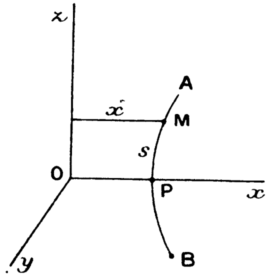
ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une barre homogène* AB, *de masse* M, *est mobile dans un plan* xOy *autour de son milieu* O *qui est fixe. Un cercle homogène de masse* μ, *mobile dans le plan* xOy, *ne peut que rouler sur la barre* AB. *Les divers points matériels de ce cercle sont attirés par le point* O *proportionnellement à leur masse et à leur distance au point* O. *On demande d'étudier le mouvement du système.*

Étudier le cas particulier où le système part du repos.

Peut-on choisir les conditions initiales de façon que le cercle C *reste en équilibre relatif sur la barre* AB?

N. B. — Dans la discussion on supposera que la barre AB est toujours assez longue pour que le cercle ne puisse pas la quitter.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une poulie, constituée par une surface dont on néglige l'épaisseur, est définie géométriquement de la façon suivante : Soit* APB *la courbe méridienne située dans le plan* $x\mathrm{O}z$ *qui, en tournant autour de* $\mathrm{O}z$,



engendre la surface de la poulie; si M *est un point quelconque de cette méridienne, on a, en désignant par* x *l'abscisse du point* M *et par* s *l'arc* PM,

$$x = \sqrt{1 + s^2},$$

et l'arc s *varie entre* -1 *et* $+1$. *On demande de calculer le rayon d'inertie de la poulie par rapport à son axe* $\mathrm{O}z$.